Instituto Superior Técnico

1$^{\text{O}}$ Teste de Matemática Computacional (versão b) - 06/11/2007

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores

Apresente todos os cálculos que efectuar

1. Considere a função $f(x) = Log[1 + 2x] - e^{-x}$. Sabe-se que existe um só número real z, localizado no intervalo $[0.4, 0.6]$, tal que $f(z) = 0$. Considere ainda a função g dada por

$$g(x) = x + \alpha\, f(x), \quad \alpha \text{ real} \neq 0 \tag{1}$$

   (a) mostre que a raiz z é ponto fixo de g, independentemente do valor de α. **[0.5]**

   (b) Faça $\alpha = -1$, ou seja, $g(x) = x - f(x)$. Recorrendo ao teorema do ponto fixo, mostre que o método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ converge para z, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 pertencente a $[0.4, 0.5]$. **[1.5]**

   (c) Determine a ordem de convergência do método da alínea anterior, justificando. Como deve escolher α (em função de z) de modo a ter-se convergência quadrática? **[2.0]**

   (d) No caso de $\alpha = 2$, obtiveram-se as seguintes iteradas para o método $x_0 = 0.5, x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, ...9$
   0.673233, 1.35894, 3.47138, 7.55376, 13.1113, 19.7194, 27.1189, 35.1422, 43.6756, 52.6382. Diga o que esses resultados parecem indicar no que respeita à convergência do método para z e dê uma justificação teórica. **[1.0]**

2. Considere as matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que estas matrizes formam uma factorização LU da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Identifique o tipo de factorização e determine as constantes a, b, c, d. **(1.0)**

   (b) Com base na factorização considerada, determine a solução do sistema $A\,x = v$, onde $v = (4, 8, 0)$ e calcule $Det A$. (Utilize os valores de a, b, c obtidos na alínea anterior. Caso não tenha resolvido a alínea anterior, escolha $a = 1, b = -1, c = 3, d = 4$). **(1.5)**

   (c) Seja $v = (0, 0, 1)$. Nas condições da alínea anterior, mostre que a fórmula iteradora do método de Gauss-Seidel para o sistema $Ax = v$ tem a forma $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

(1.5)

(d) Baseando-se na alínea anterior, prove que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema considerado e que as suas iteradas satisfazem

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

onde x é a solução exacta do sistema. **(1.0)**