Instituto Superior Técnico

Teste final de Matemática Computacional 26/01/2008

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores

VERSÃO A –PRIMEIRA PARTE

Apresente todos os cálculos que efectuar

Grupo I

1. Mostre que a equação
$$e^{-x} = \ln x, \qquad x > 0 \tag{1}$$
tem 1 única raiz em $[1, 2]$. [1.0]

2. Considere as sucessões $\{x_n\}_{n\in N}$, tais que $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = g(x_n)$, onde a função iteradora g tem uma das seguintes formas:
$$i) \quad g(x) = \exp(\exp(-x));$$
$$ii) \quad g(x) = \exp(-x) + 1;$$
$$iii) \quad g(x) = x - \frac{\exp(-x) - \ln x}{{}^{-}exp(-x) - 1/x}.$$
   (a) Diga qual das funções indicadas é a função iteradora do método de Newton (quando aplicado à equação (1)) e explique como ela se obtém. [1.0]

   (b) Além da função considerada na alínea anterior, qual (ou quais) das funções indicadas gera uma sucessão que converge para a raiz da equação (1)? Justifique a resposta, com base em resultados teóricos. [1.5]

3. Que significa dizer que um método iterativo tem convergência de ordem p? Qual é a ordem de convergência no caso de aplicar a função indicada em 2-b? [1.5]

Grupo II

Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\beta^2 & 1 \\ \beta^2 & -\beta^2 & -1 \\ \beta^2 & -\beta^2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta \in I\!R.$$

1. Obtenha a factorização de Doolittle de A. [1.0]

2. Com base na factorização obtida, calcule $DetA$. Para que valores de β a matriz A é invertível? [1.0]

3. Justifique que, quando aplicado a um sistema com a matriz A, o método de Jacobi converge se e só se $0 < |\beta| < 1$. [1.5]

4. Seja $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Considere dois vectores x_1 e x_2 em $I\!R^3$, tais que $Ax_1 = (1, 1-\epsilon, 1+\epsilon)$ e $Ax_2 = (1,1,1)$ $(\epsilon > 0)$. Sabendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

determine um majorante de $\dfrac{\|x_2 - x_1\|_\infty}{\|x_2\|_\infty}$ (sem calcular x_1 nem x_2). [1.5]