Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**

Trabalho de Matemática Computacional
LCERC - LEE

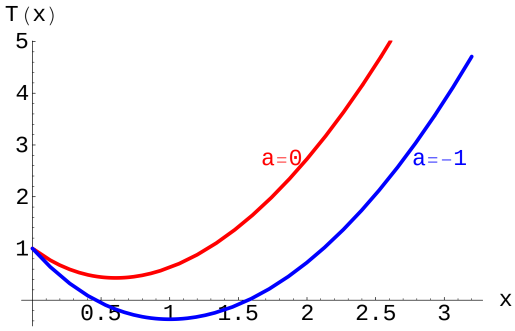
Prazo de Entrega: 31 de Outubro de 2007

Limite de páginas para o relatório = 10.
VERSÃO 1 (2007)

A distribuição de temperaturas (em °C) ao longo de uma barra é dada pela seguinte função:

$$T(x) = x(x-1) + ax - xe^{-x} + 1 \tag{1}$$

onde a é um parâmetro real, $x \in [0,3]$ (ver figura).



1. Verifique que, no caso $a = 0$, a temperatura não se anula em nenhum ponto da barra, enquanto que no caso $a = -1$ anula-se em dois pontos. Justifique teoricamente. No caso de $a = -1$ determine intervalos de comprimento 0.5 que contenham cada uma das soluções e não contenham a outra.

2. Verifique que o mé todo de Newton coverge, quando aplicado à determinação das raizes a que se refere a alínea anterior.

3. Escreva um programa que lhe permita, para cada uma das soluções consideradas na alínea anterior, obter uma aproximação com erro absoluto inferior a 10^{-6}, aplicando o método de Newton.

4. Pretende-se agora determinar o valor a_0 tal que, se $a = a_0$, a função T tem uma única raiz real em $[0,3]$.

   (a) Com esse fim, escreva um sistema de duas equações, no qual o valor de a_0 procurado é uma das incógnitas. (Sugestão: para a função T ter uma única raiz real ela deverá anular-se simultaneamente com a sua derivada).

   (b) No sistema de duas equações obtido, exclua a variável a_0 e obtenha uma equação em ordem a x.

(c) Recorrendo ao método de Newton, calcule numericamente a raiz da equação obtida, com erro absoluto inferior a 10^{-6}. Através dela, determine o valor de a_0.

5. Pretende-se resolver a equação da alínea (4c) usando o método do ponto fixo com a função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{x + xe^{-x}}. \tag{2}$$

(a) Justifique que o método considerado converge para o valor procurado, desde que $x_0 \in [0.75, 0.91]$.

(b) Escreva um programa que lhe permita obter a solução procurada pelo método do ponto fixo e use-o para calcular uma aproximação com erro absoluto inferior a 10^{-6}.

(c) Estude a ordem de convergência dos métodos considerados em (4c) e em (5b), com base nos resultados numéricos. Determine valores aproximados dos coeficientes assimptóticos de convergência e compare-os com os valores que se obtêm de acordo com a teoria.

Sugestão: Calcule os quocientes

$$\frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^p},$$

com os valores de p apropriados.