Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**

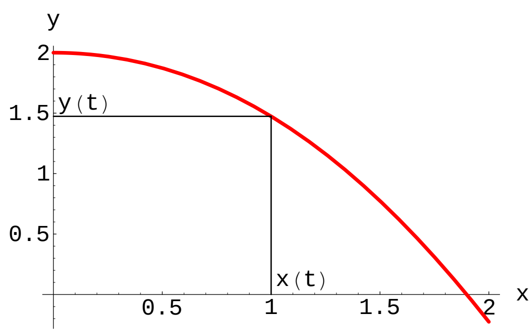
Trabalho de Matemática Computacional
LCERC - LEE

Prazo de Entrega: 31 de Outubro de 2007

Limite de páginas para o relatório = 10.
VERSÃO 2 (2007)

As coordenadas de um ponto em movimento no plano (x, y) (ver figura) são dadas pelas equações

$$x(t) = t, \quad y(t) = 3 - 2t + sint - e^{-t} \quad (t \geq 0) \tag{1}$$



1. Mostre que existe um único instante $T > 0$ tal que $y(T) = 0$.
2. Tendo em vista determinar T, considere a família de métodos iterativos (do ponto fixo) com funções iteradoras
$$g(t) = t + \lambda y(t) \tag{2}$$
onde $\lambda \neq 0$ é uma constante real dada.
   (a) Recorrendo ao teorema do ponto fixo, prove que, no caso de $\lambda = 0.5$, o método do ponto fixo com a função iteradora considerada converge para T, qualquer que seja $t_0 \in [1.5, 2.5]$; determine a ordem de convergência, justificando teoricamente a sua conclusão.
   (b) Mostre que se $\lambda > 1.5$ o método do ponto fixo associado a g não pode convergir para T.
   (c) Relativamente à alínea a), elabore um programa computacional para calcular aproximações para T até que seja satisfeito o seguinte critério de paragem: $|t_{n+1} - t_n| < 10^{-6}$, considerando $t_0 = 1.5$ e fazendo $\lambda_k = 0.1k$, $k = 1, 2, ..., 8$. Verifique, para cada λ_k, o número de iterações necessárias para que o critério de paragem seja satisfeito. Com base nesses valores, determine o valor de λ_k que proporciona a convergência mais rápida e designe-o por Λ. Justifique ainda o critério de paragem usado, relacionando-o com a estimativa do erro.

(d) Explique o valor de Λ obtido na alínea anterior com base no estudo da função iteradora.

(e) Utilizando os dados fornecidos pelo programa, no caso de $\lambda = \Lambda$, calcule os quocientes $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}, n = 0, 1, \ldots, N-1$ com vários valores de p : 0.5,1,2,2.5 Diga o que esses valores indicam no que respeita à ordem de convergência. Estão de acordo com o valor teórico? (Considere como valor de T a aproximação final t_{N+1}).

3. Analise teoricamente a convergência do método de Newton, aplicado à resolução da equação $y(T) = 0$, com $t_0 \in [1.5, 2.5]$. Determine a ordem de convergência do método.

4. Calcule uma aproximação para T usando o método de Newton e o critério de paragem acima, tomando $t_0 = 1.5$. Tendo em conta os resultados obtidos na alínea **2-c** (usando o valor Λ), compare os dois métodos quanto à rapidez de convergência .