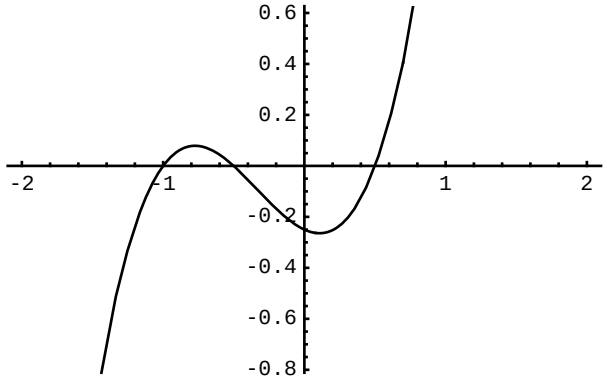
(*Resolução do exame de 20/7/2010*)

(* Grupo I *)

```
f[x_] := x^3 + x^2 - 0.25 x - 0.25
```

```
Plot[f[x], {x, -2, 2}]
```



- Graphics -

(* 1a*)

(* Temos g[x]= $x=-\sqrt{0.25x+0.25-x^3}$. Em primeiro lugar notemos que o contradomínio de g é R^-, logo g só pode ter pontos fixos negativos. Seja z um ponto fixo de g, então $z=-\sqrt{0.25z+0.25-z^3}$, de onde z^2=0.25z+0.25-z^3, ou seja, f(z)=0. *)

(*1b . Consideremos o intervalo I=[-2/3,0]. Verifiquemos se f tem uma raiz neste intervalo*)

```
f[-2. / 3]
```

0.0648148

```
f[0]
```

-0.25

(* f tem sinais opostos nos extremos do intervalo*)

```
f'[x]
```

$-0.25 + 2\,x + 3\,x^2$

```
f''[x]
```

$2 + 6\,x$

(* f'' anula-se em x=-1/3. Logo, nesse ponto f' tem um mínimo *)

```
f'[-1 / 3]
```

-0.583333

```
f'[-2 / 3]
```

-0.25

```
f'[0]
```

```
-0.25
```

```
(* f' é negativo nos extremos do intervalo, e o seu mínimo,
  f'(-1/3), também é negativo. Conlui-se portanto que f'(x)<0 em I. Logo,
  f tem uma única raiz z1 em I, que também é ponto fixo de g, conforme a alinea a) .*)
```

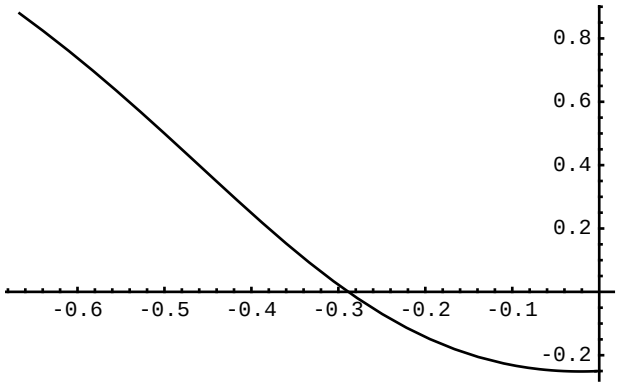
```
(* Vejamos se o ponto fixo de g, situado em I, é atractor*)
```

```
g[x_] := -Sqrt[0.25 x + 0.25 - x^3]
```

```
g'[x]
```

$$-\frac{0.25 - 3\,x^2}{2\sqrt{0.25 + 0.25\,x - x^3}}$$

```
Plot[g'[x], {x, -2 / 3, 0}]
```




```
- Graphics -
```

```
g'[-2. / 3]
```

```
0.879128
```

```
g'[0]
```

```
-0.25
```

```
(* Por outro lado, sendo g' monótona (decrescente), conforme o enunciado, e sabendo
  que |g'(-2/3)|=0.88 e |g'(0)|=0.25, podemos concluir que |g'(z1)|<1,
logo z1 é ponto fixo atractor de g e o método pode ser utilizado*)
```

(*1c*)

```
(*O método do ponto fixo tem convergência de ordem 1 (linear),
sempre que o ponto fixo seja atractor e que
  g'(z)≠0. Neste caso, já vimos que o ponto fixo é atractor. Por outro lado,
g´ só se anula em x = -1/Sqrt[12], que não é o ponto fixo,
já que  g(-1/Sqrt[12]) ≠ -1/Sqrt[12]. Conclusão: o método do ponto fixo tem convergência de ordem 1 *)
```

(*1d. Quanto à raiz z2, podemos verificar que ela pertence,

```
por exemplo, ao intervalo,[-1.2,-0.8], visto que *)
```

```
f[-1.2]
```

```
-0.238
```

```
f[-0.8]
```

0.078

```
(* Temos*)
```

```
g'[-1.2]
```

1.57097

```
g'[-0.8]
```

1.11383

```
(* Como sabemos que g' é monótona em R⁻, podemos concluir que g'(x)>1,
para x∈[-1.2,-0.8]. Visto que z2 pertence a este intervalo,
temos g'(z2)>1 , logo este ponto fixo de g é um repulsor. Por conseguinte,
g não pode ser usada como  função iteradora para aproximar z2*)
```

(*2a*)

```
(* Seja I2=[0.4, 0.6] . verifiquemos se as
  condições do método de Newton são satisfeitas neste intervalo*)
```

```
(*1*)
```

```
f[0.4]
```

-0.126

```
f[0.6]
```

2.618

```
(*2*)
```

```
f'[0.4]
```

1.03

```
f'[0.6]
```

2.03

```
(* f' é crescente em I2, porque f'' é positiva. Logo, f' não se anula em I2*)
```

```
(*3)
```

```
f''[x]
```

2 + 6 x

```
(* f'' é positiva em I2*)
```

```
(*4*)
```

```
f[0.4] / f'[0.4]
```

-0.12233

```
f[0.6] / f'[0.6]
```

```
0.0866995
```

```
(* Temos|f[0.4]/f'[0.4]|< 0.6-0.4=0.2, |f[0.6]/f'[0.6]|<0.2*)
```

```
(* estão satisfeitas todas as condições do método de Newton,
logo este pode ser aplicado,
tomando como aproximação inicial qualquer ponto x0∈[0.4,0.6]*)
```

(*2b*)

```
x0 = 0.6
```

```
0.6
```

```
x1 = x0 - f[x0] / f'[x0]
```

```
0.5133
```

```
(* f' é crescente em I2, logo min_{x∈ I2} |f'(x)|=f'(0.4) *)
```

```
m = f'[0.4]
```

```
1.03
```

```
(* f'' é crescente em I2, logo max_{x∈ I2} |f''(x)|=f''(0.6) *)
```

```
M = f''[0.6]
```

```
5.6
```

```
(* Majorante do erro*)
```

```
M / (2 * m) 0.2^2
```

```
0.108738
```

(* Grupo II*)

```
(*1*)
```

```
(* No caso de ∈=0*)
```

```
A = {{2, 1, 0}, {1, 3, 0}, {0, 1, 3}}
```

```
{{2, 1, 0}, {1, 3, 0}, {0, 1, 3}}
```

```
(* Calculemos a matiz de iteração dométodo d Jacobi*)
```

```
CJ = {{0, -1 / 2, 0}, {-1 / 3, 0, 0}, {0, -1 / 3, 0}}
```

$$\left\{\left\{0, -\frac{1}{2}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{3}, 0, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{3}, 0\right\}\right\}$$

```
(* A norma por linha de CJ é ||CJ||∞ =1/2 *)

(* Vamos usar a estimativa do erro a posteriori*)

(*||x-x^(k)||∞≤ ||CJ||∞^k / (1-||CJ||∞) ||x^(1)-x^(0)|| *)

(* Calculemos x^(1), sabendo que x^(0)é o vector nulo*)

(*x^(1)= (-1/2,0,0) *)

(* Logo ||x^(1)-x^(0)||=1/2 . substituindo na estimativa,*)

(*||x-x^(k)||∞≤ (1/2)^k / (1-1/2) ||x^(1)-x^(0)|| = (1/2)^k / (1-1/2)   1/2=(1/2)^k*)
```

(*2*)

```
(* Jacobiana de F*)

JF[x_, y_, z_] := {{2, 1, -ϵ Sin[z]}, {1 - 3 ϵ * z, 3, -3 * ϵ * x}, {2 ϵ * x, 1, 3}}

A = JF[1, 0, 0]
```

$$\{\{2, 1, 0\}, \{1, 3, -3\,\epsilon\}, \{2\,\epsilon, 1, 3\}\}$$

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3\,\epsilon \\ 2\,\epsilon & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
(* Sistema linear *)

(*F1(1,0,0)= 2*1+0+0+ϵ+1=3+ϵ; F2(1,0,0)=1;F3(1,0,0)=ϵ *)

(* A Δx = -(3+ϵ,1,ϵ)  *)
```

(*3*)

```
Inverse[A]
```

$$\left\{\left\{\frac{9+3\,\epsilon}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, -\frac{3}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, -\frac{3\,\epsilon}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{-3-6\,\epsilon^2}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, \frac{6}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, \frac{6\,\epsilon}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}\right\}, \left\{\frac{1-6\,\epsilon}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, \frac{-2+2\,\epsilon}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}, \frac{5}{15+6\,\epsilon-6\,\epsilon^2}\right\}\right\}$$

```
% /. ϵ → 0
```

$$\left\{\left\{\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{3}\right\}\right\}$$

```
(* Quando ϵ≈0, temos ||A||∞≈4, ||A^-1||∞≈4/5,
logo onúmero de condição de A, na norma por linha,
é próximo de 4*4/5=16/5. Sendo o número de condição um número moderado,
o  sistema é bem condicionado *)
```

(*GRUPO III*)

(* Pergunta 1a*)

```
(* Diferenças divididas*)

(* f[1,2]*)

f12 = 12 - (-1)
```

13

```
(*f[2,3]*)

f23 = 39 - 12
```

27

```
(*f[1,2,3]*)

f123 = (f23 - f12) / (3 - 1)
```

7

```
(* Polinómio interpolador*)

P2[x_] = -1 + f12 (x - 1) + f123 (x - 1) (x - 2)
```

$-1 + 13\,(-1 + x) + 7\,(-2 + x)\,(-1 + x)$

```
Expand[P2[x]]
```

$-8\,x + 7\,x^2$

(* Pergunta 1b*)

```
(* Sabendo que f'''(x)=6, conclui-
  se que f é um poliómio de grau3 e que o coeficiente do seu termo principal é 6/3! =
 1. Logo, pela forma interpoladora de Newton,*)

f[x_] := P2[x] + (x - 1) (x - 2) (x - 3)

Expand[f[x]]
```

$-6 + 3\,x + x^2 + x^3$

(* Pergunta 1c*)

```
(* Temos as seguintes funções de base*)

f0[x_] := 1

f1[x_] := Exp[x]
```

```
f00 = 3
```

$$3$$

```
f01 = Exp[1] + Exp[2] + Exp[3]
```

$$e + e^2 + e^3$$

```
f11 = Exp[2] + Exp[4] + Exp[6]
```

$$e^2 + e^4 + e^6$$

```
S = {{f00, f01}, {f01, f11}}
```

$$\left\{\left\{3, e + e^2 + e^3\right\}, \left\{e + e^2 + e^3, e^2 + e^4 + e^6\right\}\right\}$$

```
N[S] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3. & 30.1929 \\ 30.1929 & 465.416 \end{pmatrix}$$

```
b1 = -1 + 12 + 39
```

$$50$$

```
b2 = Exp[1] (-1) + Exp[2] * 12 + Exp[3] * 39
```

$$-e + 12\, e^2 + 39\, e^3$$

```
b = {b1, b2}
```

$$\left\{50, -e + 12\, e^2 + 39\, e^3\right\}$$

```
N[b]
```

$$\{50., 869.286\}$$

```
LinearSolve[S, b]
```

$$\left\{\frac{-51 + 11\, e}{2\,(-1 + e)}, \frac{53 + 67\, e}{2\,(-1 + e)\, e\,\left(1 + e + e^2\right)}\right\}$$

```
N[%]
```

```
{-6.13953, 2.26605}
```

(* Pergunta 2a*)

```
(* Método dos Coeficientes Indeterminados*)
(* Tem que se resolver o sistema de equações*)
(* A0+A1=3*)
(* A0+ 2A1= ∫_0^3 xdx=9/2*)
(* Solução: A0=A1=3/2*)
(* Q(f)= 3/2 f(1) +3/2 f(2)*)
(* Verifiquemos se Q é exaxcta para polinómios de grau 2*)
(* Q(x^2)= 15/2; I(x^2)=∫_0^3 x^2dx =27/3 =9*)
(* Q não é exacta para x^2, logo tem grau 1*)
```

(* Pergunta 2b*)

```
(* Seja g(x)=f(x)/(x+1)*)
(* Q(g)=3/2(g(1)+g(2))=3/2 (-1/(1+1)+12/(2+1)) =21/4*)
```

(*GRUPO IV*)

(* Pergunta 1a*)

```
(* Substituição de variável:y1=y, y2=y'*)
(* Sistema de equações:  y1'(x)=y2(x), y2'(x)= x^2 +x y1(x) -2y2(x) *)
f1[y2_] := y2
f2[x_, y1_, y2_] := x^2 + x * y1 - 2 * y2
(* Fórmula do método de Euler*)
(* y_(1,i+1)= y_(1,i)+h f1[ y_(2,i)] = y_(1,i)+h y_(2,i)*)
(* y_(2,i+1)= y_(2,i)+h f2[x,y_(1,i), y_(2,i)]= y_(i,2)+h(x_i^2+x_i y_(1,i)-2 y_(2,i)*)
```

(* Pergunta 1b*)

```
(* Seja h=0.25, então x0=0, x1=0.25, x2=0.5*)
(* Pelas condições iniciais, temos*)
y10 = 1; y20 = -1
```

```
-1
```

```
(* Temos que efectuar dois passos. 1º Passo:*)
```

```
h = 0.25
```

0.25

```
y11 = y10 + h * y20
```

0.75

```
x0 = 0
```

0

```
y21 = y20 + h * f2[x0, y10, y20]
```

−0.5

```
(*Segundo passo*)
```

```
y12 = y11 + h * y21
```

0.625

```
x1 = 0.25
```

0.25

```
y22 = y21 + h * f2[x1, y11, y21]
```

−0.1875

```
(* O valor aproximado de y(0.5) é y12=0.625*)
```

(* Pergunta 2*)

```
(* Aproximando a equação diferencial por um
 esquema de diferenças finitas de segunda ordem, temos:*)
```

$$\frac{y_{n+1} - 2\,y_n + y_{n-1}}{h^2} + 2\,\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\,h} - x_n\,y_n = x_n^2$$

```
(* Pelas condições de fronteira, temos*)
```

```
y0 = 0; y4 = 2
```

2

```
(* Simplificando, temos*)
```

$$\frac{y_{n-1}}{h^2} - \frac{y_{n-1}}{h} - 2\,\frac{y_n}{h^2} - x_n\,y_n + \frac{y_{n+1}}{h^2} - \frac{y_{n+1}}{h} = x_n^2$$

```
(*ou*)
```

$$y_{n-1}\,(1 - h) - y_n\left(2 + h^2\,x_n\right) + y_{n+1}\,(1 + h) = x_n^2\,h^2$$

```
(* onde x_n=n h; n=1,2,3*)
```

```
(* Ficamos com um sistema de 3 equações a 3 incógnitas*)
```

```
(* Matriz*)
```

```
h =.
```

```
A = {{-(2 + h^3), 1 + h, 0}, {1 - h, -(2 + 2 h^3), 1 + h}, {0, 1 - h, -2 + 3 h^3}}
```

$$\left\{\left\{-2 - h^3,\ 1 + h,\ 0\right\},\ \left\{1 - h,\ -2 - 2\,h^3,\ 1 + h\right\},\ \left\{0,\ 1 - h,\ -2 + 3\,h^3\right\}\right\}$$

```
A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -2-h^3 & 1+h & 0 \\ 1-h & -2-2\,h^3 & 1+h \\ 0 & 1-h & -2+3\,h^3 \end{pmatrix}$$

```
(* Segundo Membro*)

(* Sabendo x1=h, x2=2h, x3=3h, temos*)

b = {h^4, 4 * h^4, 9 h^4 - 2 (1 + h)}
```

$$\left\{h^4,\ 4\,h^4,\ 9\,h^4-2\,(1+h)\right\}$$

```
(* Substituindo o valor de h*)

h = 0.25
```

```
0.25

A // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -2.01563 & 1.25 & 0 \\ 0.75 & -2.03125 & 1.25 \\ 0 & 0.75 & -1.95313 \end{pmatrix}$$

```
b
```

```
{0.00390625, 0.015625, -2.46484}
```