Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Exame de Matemática Computacional -29 de Janeiro de 2004 (primeira época)
Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

I

Considere a equação

$$x^3 - x = 1/4\cos(x). \tag{1}$$

1. **1.0** Com base nos teoremas sobre localização de raizes mostre que esta equação tem, no máximo, 3 raizes reais.
2. **1.5** Mostre que a equação (1) tem duas raizes z_1, z_2 situadas, respectivamente, nos intervalos $[-0.5, -0.2]$ e $[1.0, 1.5]$, e que existe apenas 1 raiz em cada um desses intervalos.
3. **2.0** Considere as funções iteradoras

   $$g_1(x) = x^3 - 1/4\,\cos x$$

   e

   $$g_2(x) = (x + 1/4\cos x)^{1/3}.$$

   Se partirmos da aproximação inicial $x_0 = 0.5$ e aplicarmos cada uma das funções iteradoras obtemos sucessões que convergem para cada uma das raizes consideradas na alínea anterior. Diga qual das funções corresponde a cada uma das raizes e justifique, com base no teorema do ponto fixo.
4. **1.5** Indique uma nova função iteradora que permita obter aproximações de cada uma das raizes consideradas, de tal modo que a convergência das respectivas sucessões seja quadrática.

II

Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ a & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

1. **1.5** No caso de $a = 2$, obtenha a factorização de Doolittle de A, efectuando previamente as transformações que forem necessárias.

2. **1.5** Aplicando a factorização que obteve na alínea anterior, calcule a terceira coluna de A^{-1} (sem calcular toda a inversa de A!).

3. **2.0** Justifique que o método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja o segundo membro b e a aproximação inicial $x^{(0)} \in I\!R^3$, desde que $a \in]-13/6, 11/6[$.

4. **1.0** No caso de $a = 8$, se quisesse aproximar a solução do sistema $Ax = b$ pelo método de Jacobi, que alterações deveria previamente efectuar no sistema (sem alterar a solução) a fim de garantir a convergência do método?

III

1. Considere a função real f cujos valores são dados na seguinte tabela:

x_i	-2	-1	-0.5	0
$f(x_i)$	6	2	α	4

   (a) **1.5** Supondo que f é um polinómio de grau 2, obtenha esse polinómio e calcule α, usando a fórmula interpoladora de Lagrange.

   (b) **2.0** Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior e supondo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, calcule de novo o valor de α.

2. **1.5** Utilizando a fórmula de Simpson, obtenha um valor aproximado de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$. Admitindo que f tem a forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + d\,e^{-x/2}$ (onde a_0, a_1, a_2, d são constantes reais), determine um majorante do erro absoluto da aproximação obtida.

3. Considere o problema de valores iniciais $2y'(t) - y(t) + t = 0$, com $y(0) = 2$.

   (a) **1.5** Mostre que a aplicação do método de Euler ao problema considerado, com passo $h > 0$ conduz à fórmula $y_n = 2 + nh$, $n = 1, 2, \ldots$. (Sugestão: use o princípio da indução).

   (b) **1.5** Justifique que, neste caso, o método de Euler nos dá a solução exacta do problema .

SEGUNDA PARTE

1. **10** Escreva um programa em *Mathematica* que , sendo conhecidos os nós e o intervalo de integração , permita calcular os pesos de uma regra de integração numérica.

   Dados: Nós (lista de números reais) e extremos do intervalo (reais a, b).

   Obter: Pesos (lista de números reais).

   Sugestão: Usar a função *LinearSolve* para resolver o sistema de equações correspondente.

2. **10** Escreva um programa em *Mathematica* que, dados os pesos e os nós de uma regra de integração numérica, permita determinar o grau dessa regra.

   Nota: Se a regra não for exacta exacta nem para polinómios de grau 0, convenciona-se que o grau da regra é -1.

   Dados: Nós e pesos (listas de números reais, com o mesmo comprimento); extremos do intervalo (reais a, b).

   Obter: grau (número inteiro).