MATEMÁTICA COMPUTACIONAL
Aula Laboratorial I – Setembro de 2002

O que é o *Mathematica*

• O *Mathematica* é um software que permite fazer cálculos numéricos e e simbólicos, usando uma linguagem muito próxima da linguagem usual da matemática. Constitui também uma ferramenta muito útil para o traçado de gráficos de diversos tipos.

Como inicializar o *Mathematica*

A maneira mais comum consiste em premir duas vezes o ícone "Mathematica" que se encontra no directório $c : \backslash ProgramFiles \backslash WolframResearch \backslash Mathematica$. O nome do directório poderá variar consoante a versão do Mathematica que instiver instalada no computador e o modo como tiver sido instalada. Em caso de dúvidas, consulte o docente ou o pessoal do laboratório.

• O *Mathematica* é constituído de duas partes o Kernel e o FrontEnd. O Kernel processa os cálculos. O FrontEnd é a interface gráfica entre o utilizador e o Kernel. O Notebook faz parte do chamado FrontEnd. No Notebook podem-se editar os comandos como num processador de texto. O Notebook é formado por células. Cada célula pode conter o Input (Comando introduzido pelo utilizador) e o seu respectivo Output (resultado do processamento do comando), mensagens de erro, gráficos, etc... Uma célula pode ser editada, copiada, removida, etc... Qualquer Input de uma célula pode ser re-calculado.

Como terminar uma sessão do *Mathematica*

•Para terminar um sessão do *Mathematica* seleccione "Exit" no menu "File".

Como interromper um cálculo no *Mathematica*

• Para interromper um cálculo faça "Alt **.**" ou no menu "Kernel" escolha "Abort Evaluation".

Como guardar o seu Notebook

• Para guardar em disco o seu Notebook, no menu "File" selecione "Save as" e introduza um nome à sua escolha. Naturalmente, aconselha-se o uso de uma área pessoal protegida ou de uma diskette.

Se estiver interessado em minimizar o volume ocupado pelo seu ficheiro, poderá optar por não armazenar o output de cada um dos comandos do Notebook. Para esse efeito, antes de salvaguardar o seu Notebook seleccione "Delete all output" no menu "Kernel".

Sintaxe do *Mathematica*

• O *Mathematica* é "Case Sensitive", ie, nos seus comandos letras maiúsculas e minúsculas não são indistintas. Como qualquer linguagem de programação o *Mathematica* tem a sua própria sintaxe. Algumas regras:

∗ Os comandos começam com letra maiúscula. Se o comando é formado por diversas palavras em inglês, cada palavra começa com letra maiúscula. Ex: FullForm

∗ O *Mathematica* usa vários tipos de parêntesis: (){}[]

As funções precisam de argumentos que são escritos entre parêntesis rectos. Ex: Sin[x]. Se a função tiver mais do que um argumento ele é separado dos demais por vírgulas. Ex: Log[10,100].

As chavetas são normalmente usadas para delimitar uma lista, de modo a que todos os objectos de um conjunto sejam tratados como um só.

Os parêntesis são usados para agrupar termos, como em Álgebra. Às vezes são estritamente necessários; outras vezes são usados para tornar as expressões mais claras.

Principais comandos que aprenderão nos exercícicios a seguir:

$+ - * / \hat{}$
Plus, Subtract, Times, Divide, Power
N
TreeForm, FullForm
Sqrt, Pi
Cos, Sin, Tan, Csc, Sec, Cot
ArcCos, ArcSin, ArcTan, ArcCsc, ArcSec, ArcCot
Log, Exp
%
Expand, Factor
Clear
Range
Apply
Plot, ListPlot, AxesOrigin, Frame, PlotRange, PlotStyle ,RGBColor, AbsoluteThickness, PointSize, Thickness
Table
Timing
FactorInteger
!

No *Mathematica* é muito importante o tipo dos números (inteiro, racional, irracional) que compõem uma expressão aritmética. Vejamos porquê.

1. **Operações entre números inteiros**:

(a) No seu Notebook escreva

$$2 + 2$$

O *Mathematica* não sabe que deve avaliar o comando acima. Para avaliar uma expressão, prima as teclas "Shift" " Return" simultâneamente e aguarde. Aparecerá no écran "In[1] ", "Out[1]", que abrevia a palavra Input e Output respectivamente. O número entre parêntesis rectos indica que este é o 1^o Input e o 1^o Output. O *Mathematica* numera o Input e Output pela ordem em que são executados.

Note que o programa demorou um pouco a dar a resposta. O primeiro comando que se executa no *Mathematica* inicializa o Kernel. Por isso aconselha-se a executar um comando muito simples antes de fazer cálculos complicados. Também se aconselha a salvaguardar o seu Notebook com frêquencia para não perder o trabalho já feito.

(b) Qual a ordem com que o *Mathematica* avalia uma expressão aritmética? Avalie:

$$10 * (3 \quad 5 + 24/3)$$

Note que entre o 3 e o 5 não há o sinal de multiplicação , mas o *Mathematica* assume a existência do símbolo. É como normalmente estamos acostumados a escrever...

Já desconfia como o *Mathematica* avalia as expressões aritméticas? Então experimente os comandos:

TreeForm[a*(b c + d/c)]
FullForm[a*(b c + d/c)]

Experimente colocar outras expressões aritméticas entre os parêntesis rectos. Por exemplo: FullForm[a^b^c]

(c) Exponenciação

Calcule: 2^2^2^2

O símbolo ^ indica exponenciação . Note que isto significa $2^{2^{2^2}}$.

E agora calcule:

2^2^2^2^2

(d) Note que o último número é tão grande que não cabe no écran. O símbolo \ indica que a linha continua na seguinte.

O último número contém muitos algarismos. Experimente o comando:

N[%]

N é uma função do *Mathematica* que transforma um valor exacto num número decimal. Isto ficará mais claro adiante.

% refere-se ao último Output. Desta maneira não é necessário voltar a calcular o número 2^2^2^2^2. %n, refere-se ao resultado em $Out[n]$. Ex. %2 refere-se ao $Out[2]$.

Quando quisermos saber mais informação acerca de um comando podemos usar o Help. Qualquer comando do Help pode ser copiado e inserido no Notebook em que estiver a trabalhar. No menu "Help" escolha "Help". O Help está dividido nos seguintes tópicos:

<u>Built-in Functions</u>. Informação acerca das funções que estão definidas no *Mathematica.*

<u>Add-ons</u>. Informação acerca dos programas adicionais no seu sistema.

<u>The Mathematica Book</u>. O livro "The *Mathematica* Book".

<u>Getting Started</u>. Algumas informações iniciais.

<u>Other Information</u>. Informações acerca dos comandos definidos no Menu do *Mathematica* e outras informações.

<u>Master Index</u>. Um índice geral do Help.

<u>Ambas as versões</u>: no próprio Notebook escreva:

?FullForm (* Fornece <u>breve</u> informação acerca do comando FullForm *)

??FullForm (* Fornece informação <u>detalhada</u> acerca do comando FullForm *)

?F* (* Fornece lista de todos os comandos que começam com a letra F *)

?*Form (* Fornece lista de todos os comandos que terminam com Form *)

(e) Espaços em branco no seu Notebook:

No seu Notebook podem haver espaços em branco. Um comando pode começar numa linha e terminar noutra, mas há que ter cuidado!!!

Experimente os seguintes exemplos:

```
3 *
  4

 3
*4

3
4

4
```

(3
$*4)$

No seu Notebook pode misturar texto com comandos. Ao lado de um comando pode escrever um comentário. Assim o *Mathematica* executa o comando, mas não executa o comentário. Comentários são escritos entre os símbolos: (* *).

Experimente:

$3 * 4$ (* multiplicação de 3 por 4 *)

2. **Operações entre números racionais** (n^{os} que podem ser escritos na forma $p/q, p, q \in \mathbb{Z}$) :

   (a) No seu Notebook escreva:
   $2/4 + 24/144 + 1$
   obs: Uma calculadora daria o resultado: 1.6666667.
   Agora experimente:
   $1/2 + 1/4$
   $23/29 + 12/55$
   $23/29 + 11/55$

Note que o *Mathematica* não aproxima o resultado, apresenta-o em termos de números racionais. Agora experimente $N[\quad]$, onde entre parêntesis rectos escreva cada uma das expressões acima. Não é necessário reescrever cada uma das expressões. O Notebook pode ser editado, e portanto, basta editar a linha onde está a expressão . "Clique" o rato na linha e posição apropriada e escreva ... Para avaliar o novo comando não se esqueça de primir a teclas "Shift" "Return" simultaneamente.

3. **Operações entre números irracionais** (n^{os} que não podem ser escritos na forma $p/q, p, q \in \not\mathbb{Z}$) :

   (a) O *Mathematica* representa os números na forma mais exacta possível.
   Experimente os seguintes cálculos:

$$Sqrt[2]$$

$$Sqrt[20]$$

$$Sqrt[2.0]$$

A função *Sqrt* calcula a raíz quadrada do argumento que for dado.

Os diferentes resultados estão relacionados com o facto do *Mathematica* representar os números o mais preciso possível. Se o dado de entrada é um número aproximado o *Mathematica* retorna um valor aproximado, mas se o dado de entrada é um número exacto o *Mathematica* retorna a forma **simbólica exacta**. Isto está de acordo com o que observou acima? Porquê? Isto só é possível porque o *Mathematica* conhece as regras de transformação de algebra e trigonometria

Alguns testes que podem ajudar a entender a observação acima:
Experimente: 2.0/3.
Experimente:

$$N[Sqrt[2]] \quad N[Sqrt[2.0]] \quad Sqrt[N[2]] \quad Sqrt[N[2.0]]$$

(b) Algumas constantes irracionais importantes de matemática estão definidas no *Mathematica*. No seu Notebook execute cada um dos seguintes comandos:

$$Pi$$

$$2 * Pi/10$$

$$N[Pi, 20]$$

Novamente o *Mathematica* procura manter os resultados representados na forma mais precisa possível.

O segundo argumento da função **N**, no caso 20, indica o número de algarismos de precisão que serão apresentados para o primeiro argumento, Pi.

(c) Outras funções que o *Mathematica* tem definidas
Todas as funções trigonométricas. O cálculo é sempre feito supondo que o valor do argumento é dado em Radianos. Experimente cada uma das funções abaixo:

$$Sin[Pi/3] \quad Cos[Pi/7] \quad Tan[Pi/4]$$

O *Mathematica* não aproxima Pi, mas conhece o valor exacto de funções trigonométricas.
Experimente:

$$Sin[N[Pi/3]] \quad Cos[N[Pi/7]] \quad Tan[N[Pi/4]]$$

O *Mathematica* conhece graus: $Cos[45Degree]$ significa Cos de 45 graus.

(d) De acordo com os resultados obtidos na pergunta anterior responda: Quais os argumentos da função *Sin* para os quais o output envolve a função *Sqrt*, e quais os argumentos para o quais o output envolve a função *Sin* ?

4. **Expressões Simbólicas**:

(a) Uma das vantagens da linguagem de programação *Mathematica* é a possibilidade de fazer cálculos com expressões simbólicas. Experimente:

$$(x+3)\ \hat{}\ \ 2+x+3$$

Qual a diferença entre o Input e o Output? O que espera se a expressão for uma potência negativa de x?
Experimente expandir e factorizar a expressão acima.
Expand[%]
Factor[%]
Experimente outras expressões algébricas.

(b) Uma expressão algébrica pode ter mais do que uma variável,

$$5(2+x)(x+y)+(x+y)\ \hat{}\ \ 2$$

(c) Eleve a expressão anterior ao cubo e depois factorize.

(d)

Podemos atribuir valores a variáveis:

$$z=7$$

A partir deste momento qualquer expressão que envolva a variável z terá seu valor substituído por 7. Por exemplo, experimente

$$z\ \hat{}\ \ 3-5z\ \hat{}\ \ 2+6z$$

Uma observação importante acerca do **nome de variáveis**: Qualquer sequência de letras (sem espaços) é um símbolo. A única **restrição** que se aplica é que não pode começar com número pois é interpretado como multiplicação . Conclua isto na expressão anterior e experimente o seguinte exemplo: 7a

Se tiver dúvidas acerca da observação acima, atribua um valor qualquer a a e depois execute o comando $7a$

(e) Antes que se esqueça, e se não quiser mais usar o valor numérico 7 para a variável z é conveniente **apagar essa informação da memória**. Faça,

$\boxed{\text{Clear[z]}}$

ou

$\boxed{\text{z = .}}$

Agora z passa a ser um símbolo como anteriormente!

Como na linguagem C podemos obter os valores posteriores e anteriores a uma variável. Qual o valor que a variável $z = 10$ tem guardada antes e depois de executar separadamente cada um dos comandos a seguir: $z++$,z, $++z$, z,$--z$, z,$z--$, z. Observe o Output!

(f) Podemos atribuir valores num certo intervalo a uma variável: $x =$ Range[10]. Experimente! O Output é uma lista (conjunto) de números Naturais no intervalo pedido.

Agora faça:

$$x = Range[10000]; \quad \text{(* O ponto e vírgula faz com que não imprima no écran o Output, no entanto guarda o resultado na memória! *)}$$

$Apply[Plus, x]$ (* soma os números da variável x *)

Sabe como verificar se o resultado está correcto? Depois calcule a média aritmética: %/10000

5. Gráficos.

No *Mathematica* é muito fácil desenhar o gráfico de uma função .

(a) Desenhe o gráfico da função $y = x^2 - 3$, onde $x \in [-5, 5]$:

$$Plot[x\hat{\ }2 - 3, \{x, -5, 5\}]$$

e o gráfico da função Sin no intervalo $[-4Pi, 4Pi]$:

$$Plot[Sin[theta], \{theta, -4Pi, 4Pi\}]$$

Experimente outros gráficos à sua escolha...

(b) A função $Plot$ admite várias opções adicionais, como por exemplo, os intervalos a desenhar nos eixos das abcissas e ordenadas, o estilo da linha do gráfico, a cor etc... Todas as opções passíveis de alteração podem ser obtidas em ambas as versões escrevendo no seu Notebook:

Options[Plot]

Na Versão 3.0 dentro do menu help poderá obter a informação em Built-in Functions, Graphics and Sound , Basic Options e Advanced Options.

Exemplo:[1]

$$Plot[Sin[x], \{x, -4Pi, 4Pi\}, AxesOrigin\text{->} \{0,0\}, Frame\text{->} True,$$

$$PlotRange\text{->} \{\{-6Pi, 6Pi\}, \{-1.5, 1.5\}\},$$

$$PlotStyle\text{->} \{RGBColor[0.3, 0.4, 0.5], AbsoluteThickness[1]\}]$$

desenha o gráfico com os eixos coordenados centrados na origem (AxesOrigin), com um rectângulo desenhado à volta do gráfico (Frame), intervalo do eixo das abcissas (PlotRange), estilo do gráfico (PlotStyle). Algumas das opções do PlotStyle:

RGBColor: peso de vermelho(r), verde(g) e azul(b) – os valores são dados entre 0 e 1.

AbsoluteThickness: espessura da linha do gráfico. Poderia escolher Thickness e nesse caso o valor seria relativo à área do gráfico.

6. **Outros Comandos**:

(a) Um problema interessante e actual é o de factorizar um número inteiro (decompor um número em factores primos). Para termos noção da dificuldade, pretende-se concluir como o tempo de execução de um algoritmo que factoriza um número cresce com o número de algarismos desse número. Será que o comportamento é linear? Quadrático? $\cdots$ Gráficos são uma ferramenta útil pois permitem visualizar a propriedade que queremos estudar.

Cada aluno deverá então explorar este problema e tirar as suas conclusões . Apresentaremos alguns comandos que serão úteis para investigar.

- O *Mathematica* tem implementado internamente um dos vários algoritmos que permitem factorizar um número. No *Mathematica* o comando que factoriza um número é $FactorInteger$. Experimente:

  $$FactorInteger[2646151974]$$

  Antes de prosseguir tente perceber como o *Mathematica* apresenta o *OutPut*
- O comando que calcula o tempo de execução em segundos é $Timing$. Experimente:

  $$Timing[FactorInteger[2646151974]]$$

  Note que o Output deste comando composto é uma lista (conjunto) cujo segundo elemento é o resultado do argumento de

[1] -> obtem-se escrevendo $-$ seguido de $>$ e sem espaço em branco

$Timing$ e o primeiro elemento da lista é o tempo que esse resultado demorou a ser obtido. Só nos interessa a primeira resposta. Como fazer para isolar o tempo de execução ? Experimente:

$$Timing[FactorInteger[2646151974]][[1]]$$

Como foi dito atrás **;** faz com que o Output seja omitido. Experimente o comando abaixo e justifique porque não serve para isolar o tempo de execução .

$$Timing[FactorInteger[2646151974];]$$

- Agora deveremos escolher um conjunto de pontos para os quais iremos calcular o tempo. Por exemplo, os números $(100)!, (200)!, \cdots, (3500)!$ Temos que calcular todos este números e não queremos que o tempo de calculá-los interfira no tempo de execução de factorizá-los. Note que os números são da forma: $(100j)! \qquad j = 1, \cdots 35.$
Como criar o conjunto desses pontos?
Experimente:

$$Table[(100j)!, \{j, 1, 3\}]$$

$Table$ cria uma lista (conjunto) de valores cujos elementos são o argumento de $Table$, que neste caso é $100!, \qquad (100{*}2)!, \qquad (100{*}3)!$. j varia de 1 a 3 por valores inteiros.
Queremos uma lista maior? Então altere os limites de j. E não se esqueça do **;** no final para que não imprima o *Output* no écran. O número $(100 * 35)!$ é composto por 10887 algarismos!!! Mas agora podemos dar um nome a essa lista (conjunto) para podermos, por exemplo, retirar elementos dessa lista.

$$numero = Table[(100j)!, \{j, 1, 35\}]$$

- Agora já podemos calcular o tempo de factorizar cada um deles. Como obter o tempo sem ter que repetir 35 vezes a mesma intrução ?
tempo = Table[Timing[FactorInteger[numero[[j]]]] [[1]],{j,1,35}]
$Table$ cria uma lista (conjunto) de valores cujos elementos são o argumento de $Table$, que neste caso é o tempo de factorizar o j-ésimo elemento da lista (conjunto) numero.
Após calcular o tempo de factorizar não nos interessam os factores primos mas sómente o tempo - daí o [[1]].
Note que na instrução temos $numero[[j]]$. Isto significa o j-ésimo elemento da lista.
Tenha paciência!!! Calcular o tempo de todos os pontos pode levar alguns minutos.

- Encontramo-nos aptos a desenhar o gráfico acima mencionado. Use como abcissas do gráfico $j = 1, 2, 3 \cdots, 35$ e ordenadas o $tempo/Second$. O comando apropriado do *Mathematica* é $ListPlot$,

  $$ListPlot[tempo/Second, PlotRange -> \{\{0, 35\}, \{0, 1.5\}\},$$

  $$PlotStyle -> PointSize[0.02]]$$

  Dividimos o valor de tempo por Second para só obtermos o valor numérico sem a unidade de tempo.
  $ListPlot$ é idêntico a $Plot$ com excessão de que o primeiro se aplica a funções discretas e o segundo a contínuas.

- Como lhe parece que o tempo de execução varia? Se ainda não desconfia, calcule o logaritmo de cada um dos valores $tempo/Second$ e trace o gráfico usando $ListPlot$, ie, trace o gráfico de $Log[tempo/Second]$.
  O que espera visualizar? Explique. Experimente!
  No *Mathematica* a função logaritmo é dada por:
  $Log[x]$, onde x é o número do qual queremos calcular o logaritmo na base e.
  $Log[b, x]$, onde x é o número do qual queremos calcular o logaritmo na base b.

- Agora use a sua imaginação e tente tirar o maior número de conclusões possíveis. Experimente outros números à sua escolha.
  Há números que levam mais tempo? Que levam menos?
  Faltam-lhe comandos que não sabe usar? Há comandos que não entende? Pergunte!

Bibliografia adicional sobre factorização : "Factorization and Primality Testing", David M. Bressoud.