Trabalho de Matemática Computacional
Licenciatura em Eng. Informática e Computadores
1 Sem. 03/04

Versão 2

Representemos por $A^{(n)}$ uma matriz real, de dimensão $n \times n$, cujas componentes são dadas pelas expressões:

$$a_{ij} = \frac{1}{2^i}, se\ i = j$$
$$a_{ij} = \frac{1}{2^{i+j}}, se\ i \neq j.$$

1. O objectivo deste problema é analisar o condicionamento da matriz considerada.

   (a) Prove que $A^{(n)}$ tem a diagonal estritamente dominante, qualquer que seja n.

   (b) Utilizando o comando *Inverse* calcule $\|(A^{(n)})^{-1}\|_1$ para $n = 10, 20, \ldots, 100$. Trace o gráfico do número de condição como função de n.

   (c) Utilizando os resultados das alíneas anteriores, analise o comportamento de $cond_1(A^{(n)})$ para valores grandes de n.

2. Pretende-se agora aplicar o método SOR à resolução de um sistema linear com a matriz $A^{(n)}$.

   (a) Analisando a matriz de iteração com o auxílio do *Mathematica*, determine teoricamente qual o valor de ω para o qual se obtém a convergência mais rápida. Trace o gráfico do raio espectral da matriz de iteração em função de ω. Para determinar o mínimo do raio espectral da matriz de iteração , aplique o comando FindRoot à derivada do raio expectral (calculada numericamente). Compare os resultados obtidos nos casos de $n = 2, 3, 4, 5$.

   (b) Vamos agora experimentalmente confirmar os resultados teóricos obtidos nas alíneas anteriores e generalizá-los para dimensões maiores da matriz. Aplique o método SOR à resolução do sistema $A^{(n)}x = b$, onde $b = (1, 1, \ldots, 1)$. Fazendo variar o parâmetro ω no intervalo $[0.1, 1.9]$, verifique, para cada valor de ω, qual o número de iterações necessárias para que se verifique a condição $\|x_{k+1} - x_k\|_1 < 10^{-6}$, onde x^k representa a k-ésima iterada do método SOR. Repita a experiência para $n = 2, 3, 4, 5, 10, 20$. Analise os resultados.