Trabalho de Matemática Computacional
Licenciatura em Eng. Informática e Computadores
1 Sem. 03/04

Versão 4

Ao resolver um problema de condução de calor num domínio cilíndrico, com uma fonte de calor exponencial, obtém-se um problema de valores de fronteira para uma equação diferencial de segunda ordem, a qual, uma vez aproximada pelo método das diferenças finitas, nos conduz ao seguinte sistema de equações não-lineares:

$$
\begin{aligned}
&2\tfrac{T_1}{h^2} - 2\tfrac{T_0}{h^2} + \tfrac{\alpha}{2}e^{T_0} = 0,\\
&\tfrac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{h^2} + \tfrac{1}{r_i}\tfrac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2h} + \alpha e^{T_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-2; \qquad (1)\\
&\tfrac{-2T_{n-1}+T_{n-2}}{h^2} - \tfrac{1}{1-h}\tfrac{T_{n-2}}{2h} + \alpha e^{T_{n-1}} = 0,
\end{aligned}
$$

onde $r_i = ih, i = 1, 2, \ldots, n-1$ é um conjunto de pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$; h é o espaçamento dos pontos; $T = (T_0, T_1, \ldots, T_{n-1})$ é a solução do sistema (o significado físico de T_i é a temperatura em x_i);α é um parâmetro que caracteriza fonte de calor ($\alpha > 0$).

1. No problema seguinte, vamos aplicar o método de Newton para resolver o sistema considerado.
   (a) Escreva um programa tal que, sendo dados α, n e um certo vector T, lhe permita calcular o primeiro membro do sistema (1) e a respectiva matriz jacobiana.
   (b) Tomando como aproximação inicial $T^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)$, aplique o método de Newton para obter uma solução aproximada do sistema (1). Ao aplicar o método de Newton, deverá resolver, em cada iteração , um sistema linear com uma matriz tridiagonal. Para isso, deverá usar o comando *TridiagonalSolve* do Mathematica, especialmente concebido para sistemas com matrizes tridiagonais. Este programa faz parte do package *Linear Algebra 'Tridiagonal'*. Para saber como utilizá-lo deverá procurar informações no *Help* do *Mathematica*. Use como critério de paragem a condição $\|T^{(k+1)} - T^{(k)}\|_1 \leq 10^{-10}$, onde $T^{(k)}$ representa a k-ésima iterada da solução . Considere os seguintes valores dos dados: $n = 20$, $\alpha = 0.3$; $\alpha = 0.7$ e $\alpha = 1$. Esboce um gráfico da temperatura, para cada caso. Registe o número de iterações efectuadas.
   (c) Sabe-se, que para valores de α superiores a um certo α_{cr}, o sistema deixa de ter solução . Determine experimentalmente α_{cr}.

2. Note que o sistema (1) também pode ser escrito na forma

   $$LT = -\alpha E, \qquad (2)$$

   onde L é uma certa matriz de dimensão n e E é o vector $E = (\frac{e^{T_0}}{2}, e^{T_1}, \ldots, e^{T_n})$. Partindo da representação do sistema na forma (2), é possível resolvê-lo pelo método do ponto fixo. Nesse caso, o esquema do processo iterativo será

   $$T^{(k+1)} = T^{(k)} + \tau(LT^{(k+1)} + \alpha E^{(k)}), \qquad (3)$$

   onde τ é um parâmetro real, escolhido de modo a que o método convirja.

   (a) Para cada um dos valores de α, referidos em 1-b, determine experimentalmente o intervalo de valores de τ para os quais o método (3) converge, e o valor τ_{op}, para o qual a convergência é o mais rápida possível.
   (b) Utilizando o método (3) com $\tau = \tau_{opt}$, obtenha uma nova aproximação , no caso de $n = 20$ e para os valores de α acima considerados. Compare com os resultados obtidos em 1-b). Compare a rapidez de convergência com a do método de Newton.