Capítulo VI
Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'(x) = 1 - x + 4y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ &y(0) = 1, \end{aligned}$$

com solução exacta $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)e^{4x}$.

   (a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

   (b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

   (c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado obtido em a).

2. Utilize o método de Runge-Kutta de ordem 2 (método do ponto médio) para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$ com espaçamentos $h = 0.1, 0.05, 0.025$. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = \exp(x) - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

3. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, \quad 2 \leq x \leq 3, \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

determine um valor aproximado de $y(2.1)$ pelo método de Euler com $h = 0.1, 0.05, 0.025$.

4. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4y(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ usando o método de Runge-Kutta de ordem 4, com $h = 0.2$.

5. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 0.04y(x), \quad 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = 1000 \end{cases}.$$

(a) Calcule valores aproximados de $y(1)$ pelo método de Taylor de ordem 2 com $h = 1$ e $h = 0.5$.

(b) Sabendo que a solução exacta do problema considerado é $y(x) = 1000e^{0.04x}$, determine os erros das aproximações obtidas na alínea anterior.

(c) Mostre que, se utilizar a regra do ponto médio para aproximar a solução do problema considerado, se obtêm exactamente os mesmos valores que com o método de Taylor de segunda ordem.

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), & 0 \leq x \leq 20, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que, se usar o método de Runge-Kutta de segunda ordem com $a_2 = 1$ (método dos trapézios) para a aproximação deste problema, se obtém a fórmula de recorrência

$$y_{n+1} = (1 - 20h + 200h^2)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(b) Aplique este método para obter uma solução aproximada de $y(1)$, com $h = 0.1$,e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é $y(x) = \exp(-20x)$. Comente o resultado.

7. Suponhamos que uma massa m se desloca sem atrito ao longo de uma barra e que essa mola está ligada através de uma mola a um ponto fixo, situado abaixo da barra (ver figura 1 em anexo). Seja m a massa, k a constante de rigidez da mola, l o comprimento da mola quando não se encontra deformada, s a distância do ponto fixo à barra ($s \leq l$). Neste caso, o movimento da massa é descrito pela seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t)\left(1 - \frac{l}{\sqrt{x(t)^2 + s^2}}\right), \tag{1}$$

onde $x(t)$ é a coordenada da massa no instante t.

(a) Reduza a equação (1)a um sistema de equações de primeira ordem.

(b) Seja $s = 3$, $l = \sqrt{10}$,$m = 3$, $k = 100$. Suponhamos que a posição inicial da massa é $x(0) = 1.4$ e a velocidade inicial é $x'(0) = 0$. Obtenha valores aproximados da posição e sa velocidade da massa no instante $t = 0.2$, usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

(c) Mantendo-se as condições da alínea anterior, obtenha aproximações dos mesmos valores usando o método de Runge-Kutta de segunda ordem com $a_2 = 0.5$ (método do ponto médio).

(d) Escreva um programa em Mathematica, utilizando o método do ponto médio, que permita calcular uma solução aproximada da equação (1), num certo intervalo $[0, T]$. Como dados, considere os valores de s,l,k,m, o passo h e os valores iniciais $x(0)$,$x'(0)$.

(e) Compare os resultados obtidos pelo seu programa com os do comando $NDSolve$.