Análise Matemática II

Exercícios XII

1 - Calcule, nos pontos em que estejam definidas, as derivadas parciais de primeira, segunda e terceira ordem das seguintes funções:

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad g(x,y) = \cosh(xy)$$

$$h(x,y) = x^y \qquad \varphi(x,t) = \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-s^2} ds$$

Verifique que $\varphi(x,t)$ satisfaz a equação do calor:

$$k\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

2 - Sejam f, g, h funções 2 vezes diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$. Determine a expressão, em termos das derivadas parciais dessas funções, das derivadas parciais de primeira e segunda ordem de

$$\Phi(x,y,z) = f(g(x,y), h(y,z))$$

3 - Dada a função G real e diferenciável em $\mathbb{R}^2$, mostre que a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y,z) = G(x^2 - y^2, y^2 - z^2)$$

satisfaz a equação

$$yzF'_x(x,y,z) + xzF'_y(x,y,z) + xyF'_z(x,y,z) = 0$$

para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

4 - Sendo $u(x,y)$ uma função real de classe C^1 e $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2$$

5 - Sendo $u(x, y, t)$ uma função real de classe C^1 que satisfaz a equação do movimento ondulatório

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

e $U(r, \theta, t) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$, deduza a equação correspondente satisfeita por U no caso de ondas circulares (as que dependem apenas de r e t).

6 - Determine e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções:

$$f_1(x, y) = e^x + e^y - e^{x+y}$$

$$f_2(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$$

$$g(x, y, z) = x + \tfrac{y^2}{4x} + \tfrac{z^2}{y} + \tfrac{2}{z}$$

$$h(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - 2y^5$$

7 - Determine os extremos, relativos e absolutos, das seguintes funções:

a) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6x$ com domínio

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

.

b) $g(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$ com domínio

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

.

8 - Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem da função

$$f(x, y) = x^2 e^{x+y} + xy$$

em torno de $(0, 0)$ e de $(-1, 1)$.