

Análise Matemática II

Exercícios III

1 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

$$a) \frac{1}{x^4 - x^3 - x + 1}; \quad b) \frac{x^7 + 2}{x^4 + 1}; \quad c) \frac{1}{(x^2 + 1)^2};$$

Sugestão: note que

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

e use primitivação por partes.

2 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

$$a) \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad b) \sqrt{(x-1)(x-2)}; \quad c) \frac{1}{e^x + e^{-x}};$$
$$d) \frac{x}{\sqrt{1+x}}; \quad e) \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{6-x}};$$

Sugestão: uma das possíveis soluções de e) passa pela substituição $\sqrt{x-2} = c \sin t$ onde c é uma constante adequadamente escolhida.

3 - Determine uma fórmula de recorrência para a primitiva $P \cos^n x$.

4 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

$$a) \frac{1}{\sin x + \cos x}; \quad b) \frac{1}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}; \quad c) \frac{(1 + \cos x)^2}{\sin x(2 + \cos^2 x)};$$

Nota: É sempre possível primitivar funções racionais de $\sin x$ e $\cos x$, através da substituição

$$t = \tan x/2$$

que conduz a

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

mas nem sempre é essa a solução mais simples.

5 - Calcule o integral superior e o integral inferior da função definida no intervalo $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } \frac{1}{x} \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6 - Mostre que uma função monótona num intervalo $[a, b]$ é sempre integrável nesse intervalo.

Sugestão: Dada uma partição P , calcule $S_P f - s_P f$.