Análise Matemática II

Exercícios IV

1 - Calcule os integrais

$$\int_0^4 \frac{|t-1|}{|t-2|+|t-3|}\,dt \qquad \int_2^4 \frac{1}{t\ln^2 t}\,dt \qquad \int_2^4 \frac{\log_t 2}{t}\,dt$$

2 - Mostre que $\forall x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

e interprete o resultado.

3 - Calcule, sem primitivar,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

Sugestão: recorde que $\sin(\Pi/2 - x) = \cos x$ e faça uma mudança de variáveis.

4 - Usando a mesma ideia do exercício anterior, calcule

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

5 - Sendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, calcule

$$\lim_{x\to 0} \int_0^1 f(xt)\,dt$$

6 - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período T (isto é $f(x+T) = f(x)$, $\forall x$). Mostre que

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

7 - a) Recorde que $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$ e conclua que $\forall k, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(mt)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(mt)\,dt$$

b) Usando integração por partes no primeiro integral, calcule o seu valor.

c) Aplique a mesma ideia ao cálculo de

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt)\,dt$$

8 - Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt; \quad G(x) = \textstyle\int_2^{e^x} \frac{1}{\ln t}\,dt; \quad H(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t}\sqrt{t}\,dt.$$

9 - Calcule os limites das sucessões

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} \qquad\qquad y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$$

Sugestão: interprete x_n e y_n como somas superiores, associadas à partição

$$P_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\},$$

para funções definidas no intervalo $[0,1]$.