

# Análise Matemática II

## Exercícios VI

1 - Para  $\alpha > 0$ , calcule o volume (finito ou infinito) dos sólidos gerados por revolução das regiões

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < \frac{1}{x^\alpha}\}$$

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \wedge 0 < y < \frac{1}{x^\alpha}\}$$

Compare com a área das mesmas regiões.

2 - Mostre que

$$\int_0^1 (-\ln t)^n dt$$

converge e calcule o seu valor.

3 - Dadas constantes  $0 < a < b$ , determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^a - 1}} dt \quad \int_1^{+\infty} t^a \sin \frac{1}{t^b} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

4 - Mostre que  $\forall \alpha > 0$ , o integral

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

é convergente. Sugestão: começar por integrar por partes.

5 - Usando o resultado anterior, mostre que o integral

$$\int_0^{+\infty} \sin t^2 dt$$

converge.

6 - Mostre que a função

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

está definida para  $x > 0$  e que, para  $x > 1$ ,

$$\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1).$$