1 De quantas maneiras... I

A Combinatória Enumerativa trata do problema de contar os elementos de conjuntos finitos definidos por várias condições.

Para indicar que X é um conjunto com n elementos (abreviadamente dizemos que X é um $n-$conjunto) escrevemos $|X| = n$. Recorde-se que designamos por $[n]$ o $n-$conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. A notação $|X|$ designa sempre a cardinalidade do conjunto X.

1.1 Subconjuntos de $[n]$ e números binomiais

Quantos subconjuntos tem um $n-$conjunto $X = \{x_1, x_1, \cdots, x_n\}$?: cada subconjunto $U \subset X$ pode ser identificado com uma lista de comprimento n constituída por zeros e uns: a posição i da lista é 1 se $x_i \in U$ e é 0 caso contrário. O número destas listas é evidentemente 2^n.
Mais formalmente, podemos definir aquela lista como uma função

$$f_U : X \to [2], \qquad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{array} \right\}$$

O raciocínio feito corresponde a estabelecermos uma bijecção entre $P(X)$, o conjunto dos subconjuntos de X, e o conjunto das funções $f : X \to [2]$.

Nesta dedução usámos ideia intuitiva:
Princípio da bijecção (ou da identidade) : se existe uma bijecção entre dois conjuntos, então eles têm o mesmo número de elementos.

Nota 1.1 *Este princípio é até mais do que isso: o próprio conceito de "n'umero de elementos" de um conjunto (a* ***cardinalidade*** *do conjunto) baseia-se na noção de bijecções entre conjuntos. Este tema será explorado com um pouco mais de detalhe noutro conjunto de notas.*

O número de k-subconjuntos de um n-conjunto designa-se $\binom{n}{k}$. Estes números satisfazem, pela sua própria definição, algumas igualdades

1. $k > n \vee k < 0 \implies \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$; $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$;
2. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$, porque escolher um $k-$subconjunto é o msmo que escolher o seu complementar;
3. $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$: se fixarmos um elemento a do $n-$conjunto X, existem $binomn-1k-1$ $k-$subconjuntos de X que contêm a (temos que escolher os restantes $k-1$ elementos) e $binomn-1k$ $k-$subconjuntos de X que não contêm a;
4. $\sum_k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$;

Temos também o

Teorema 1.2 ***Binómio de NEWTON:***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Este teorema foi deduzido por indução em n, usando as propriedades anteriores. Mas podemos deduzi-lo igualmente por um raciocínio mais puramente combinatório: ao desenvolver o binómio do lado esquerdo como uma soma de monómios, obtemos o monómio $a^k b^{n-k}$ tantas vezes quantas as maneiras de escolher k factores $(a+b)$ para contribuir com um b, contribuindo os outros factores com um a.

Nota 1.3 *Uma exposição mais pormenorizada deste raciocínio pode ser esta: o teorema é equivalente a*

Teorema *1.4* ***Binómio de NEWTON:***

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Consideremos que temos n números $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$. *Desenvolvemos o produto* $\prod_{i=0}^{n-1}(1+x_i)$ *como*

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1+x_i) = \sum_{U\subset[n]} \prod_{i\in U} x_i.$$

Se tivermos $x_i = x$, *para todo o i ficamos com*

$$(1+x)^n = \prod_{i=0}^{n-1}(1+x) = \sum_{U\subset[n]} x^{|U|} =$$

organizando, por associatividade, a soma pela cardinalidade dos subconjuntos

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

A conhecida fórmula algébrica para os números binomiais pode ser deduzida assim:

i) o número de maneiras de escolher, **sem repetição e com ordem**, k elementos de um n-conjunto é $n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$;

ii) cada k-subconjunto de um n-conjunto pode ser ordenado de $k!$ maneiras;

iii) portanto $k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, ou seja $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

O raciocínio feito em i) e ii), tal como outros anteriores, usa uma ideia intuitiva.
Princípio multiplicativo: o número de maneiras de fazer uma escolha que é composta por k escolhas sucessivas e independentes, é dado pelo produto de maneiras de fazer cada uma destas escolhas.
Por exemplo, em i) temos a escolha e um elemento de um $n-$conjunto, seguida da escolha de um elemento de um $(n-1)-$conjunto, etc.

Podemos enunciar analogamente um **Princípio aditivo** que foi, por exemplo, usado logo no início quando contámos os $k-$subconjuntos de um

$n-$conjunto X como a soma dos elementos de dois conjuntos disjuntos: o conjunto dos $k-$subconjuntos de X que contêm a e o conjunto dos $k-$subconjuntos de X que não contêm a.

Exemplo 1.5 *Neste exemplo usamos ambos os princípios: quantos* $6-$*subconjuntos de* $[30] = \{0, 1, \cdots, 29\}$ *contêm pelo menos* 4 *números pares?*
Como$[30]$ *tem* 15 *números pares (e* 15 *ímpares, claro), podemos contar os subconjuntos pedidos como*

$$\binom{15}{4}\binom{15}{2} + \binom{15}{5}\binom{15}{1} + \binom{15}{6}\binom{15}{0}.$$

Outra ideia muito presente na dedução de fórmulas de contagem é o **Princípio da dupla contagem:** Se contarmos os elementos de um conjunto de duas maneiras, o resultado é o mesmo.

Este princípio, tal como os anteriores, é totalmente óbvio; pode-se pensar que eles não têm outra utilidade além de formalizar noções intuitivas. Mas nem sempre é assim:

Exemplo 1.6 *Dados* $l \leq k \leq n$, *de quantas maneiras podemos escolher um* $l-$*subconjunto de um* $k-$*subconjunto de* $[n]$*? Por outras palavras, queremos saber quantos pares* (X, Y) *existem satisfazendo*

$$X \subset Y \subset [n] \qquad |X| = l; \qquad |Y| = k.$$

Por um lado, a resposta é claramente $\binom{n}{k}\binom{k}{l}$*: escolhemos um* $k-$*subconjunto do* $n-$*conjunto e depois um* $l-$*subconjunto daquele.*
Mas podemos também começar por escolher um $l-$*subconjunto do* $n-$*conjunto, de* $\binom{n}{l}$ *maneiras possíveis, e depois formar o* $k-$*subconjunto que o contém escolhendo um* $(k-l)-$*subconjunto nos* $n-l$ *elementos restantes, de* $\binom{n-l}{k-l}$ *maneiras possíveis.*
Pense-se, por exemplo no processo de escolher uma equipa de k *ele,entos com um grupo corrdenador de* l *elementos; podemos primeiro formar a equipa e*

depois escolher o grupo, ou começpelo grupo e juntar-lhe o resto da equipa... Portanto

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}.$$

É claro que esta igualdade pode ser facilmente deduzida a partir da fórmula algébrica dos números binomiais. Mas a ideia de a deduzir decorre muito naturalmente de analisar o processo de contagem.

1.2 Escolhas

$\binom{n}{k}$ representa portanto o número de k escolhas **sem repetição e sem ordem** num n-conjunto.

O número de k escolhas **sem repetição e com ordem** num n-conjunto é, como já vimos, $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Quanto ao número de k escolhas **com repetição e com ordem** num n-conjunto, ele é claramente n^k: em cada uma das k escolhas podemos escolher qualquer um dos n elementos. Este número também pode ser identificado com o número de funções $f : [k] \to [n]$.

Nota 1.7 *Quando se fala de escolhas com repetição, isso significa que é* possível *repetir, e não que é obrigatório fazê-lo.*

Resta determinar o número de k escolhas **com repetição e sem ordem** num n-conjunto.
Vamos obter uma fórmula visualizando este número como o de distribuir k bolas idênticas por n caixas diferentes: cada bola colocada na caixa i corresponde a uma escolha do elemento i; a condição das bolas serem idênticas traduz o facto de estarmos a contar escolhas **sem ordem**; uma k-escolha deste tipo fica determinada pelo número de bolas em cada caixa.
Mas distribuir k bolas por n caixas é o mesmo que separar k bolas (que

podemos por exemplo ver como estando alinhadas) em n partes, intercalando $n-1$ separadores. Ou seja, voltando a uma descrição mais abstracta, cada distribuição está em bijecção com uma sequência de k **B** (as bolas) e $n-1$ **S** (os separadores). Ou seja ainda, a uma escolha de k posições numa fila de de $k+n-1$ lugares.

Conclusão: o número de k escolhas **com repetição e sem ordem** num n-conjunto é igual a $\binom{k+n-1}{k}$.

Temos, portanto, as seguintes fórmulas para os números de escolhas de k elementos de um $n-$conjunto:

	c/ repet.	s/ repet
c/ ordem	n^k	$n^{\underline{k}}$
s/ ordem	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Exemplo 1.8 *Quantas soluções em inteiros* $x_i \geq 0$ *tem a igualdade*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k?$$

Evidentemente, a resposta é também $\binom{k+n-1}{k}$.
E quantas soluções existem com $x_i > 0$*? Ou seja, de quantas maneiras podemos escolher, com repetição e sem ordem,* k *elementos de um* $n-$*conjunto, com a condição de cada elemento ser escolhido pelo menos uma vez?*
É claro que se $k < n$ *o número de soluções é* 0*. A imagem da distribuição de bolas por caixas indica a resposta: colocamos uma bola em cada caixa e distribuímos as restantes* $k-n$ *(com repetição e sem ordem):* $\binom{k-n+n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$.

1.3 Exercícios

1. Quantos 10-subconjuntos de $[30] = \{0, 1, \cdots, 29\}$ contêm (pelo menos) um elemento maior que 20?

2. Um exame consiste em 20 perguntas de escolha múltipla com 4 opções cada; nas primeiras 10 uma e só uma das respostas está certa, enquanto que nas restantes pode haver mais do que uma resposta certa, devendo o aluno assinalar todas as opções que considerar correctas. De quantas maneiras é possível responder ao exame?

3. Num totoloto em que são sorteados 6 números de $\{1, 2, \cdots, 50\}$, qual a probabilidade de sairem 3 números pares e 3 ímpares? Fazendo uma aposta com 7 números, qual a probabilidade de acertar em pelo menos 3?

4. Temos 9 subconjuntos diferentes de $[12]$, cada um com 8 elementos, e cada elemento de $[12]$ pertence exactamente a um mesmo número r daqueles subconjuntos. Qual o valor de r?

5. Dado N, quantos divisores tem, em média, um natural $1 \leq n \leq N$?
Sugestão: Contar de duas maneiras as entradas não nulas de uma tabela $N \times N$ em que a entrada (i, j) é 1 se $i \mid j$ e 0 caso contrário.

6. Mostrar que

   a) se $m, n \in \mathbb{N}$ são primos entre si, então m divide o coeficiente binomial $\binom{m}{n}$.

   Sugestão: verificar primeiro que $\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$.

   b) $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

   c) se p é primo então $p \mid \binom{p}{k}$ $\forall k \in \{1, \cdots p - 1\}$.

7. Dados inteiros positivos $m < n$, mostrar que se verifica

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Sugestão: Interpretando o lado direito como o número de maneiras de escolher $m+1$ inteiros no conjunto $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, podemos separar essas escolhas em função do maior inteiro escolhido.

8. Demonstrar a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

9. Quantos caminhos existem com início no ponto $(0,0)$ e fim no ponto $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se em cada passo vamos de (u,v) para $(u+1,v)$ ou para $(u, v+1)$?

10. Demonstrar a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{k} = \binom{m+n}{n}$$

Sugestão: podemos classificar os caminhos do problema anterior em função do ponto de chegada à recta $x = m$.

11. De quantas maneiras podemos ordenar os elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ $(n > 3)$ de modo a que o 1 fique antes do 2 e o 3 antes do 4?

12. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de $[n]$ tal que se A e B são elementos de $\mathcal{A}$, então

$$A \cap B \neq \emptyset$$

. Qual o maior número possível de elementos que $\mathcal{A}$ pode ter?
Sugestão: Se A pertence a $\mathcal{A}$ então $[n] \setminus A$ não pertence.

13. Quantos pares de conjuntos (X, Y) existem tais que $X \subset Y \subset [n]$?

14. Dados inteiros positivos $k < N$, determinar o número de soluções com $x_i \geq 0$ de
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < N$$

15. De quantas maneiras podemos distribuir 20 bolas idênticas por 8 caixas diferentes $C_1, C_2, \cdots, C_8$,
   a) com a condição de nenhuma caixa ficar vazia?
   b) com a condição de nenhuma caixa ter mais do que 12 bolas?
   c) com a condição das caixas C_1 e C_2 terem o mesmo número de bolas?

16. De quantas maneiras podemos distribuir 20 bolas iguais e outras 8 bolas numeradas por 10 caixas diferentes?

17. De quantas maneiras se podem seleccionar 5 números no conjunto $\{1, 2, \cdots, 30\}$ de modo a que o valor absoluto da diferença entre quaisquer dois deles seja pelo menos 3?

18. De quantas maneiras se podem distribuir 151 bolas iguais por 5 caixas diferentes de modo a que nenhuma caixa tenha mais bolas do que a união das outras?

19. De quantas maneiras podemos distribuir $2n$ pessoas por duas mesas redondas iguais com n lugares cada?

20. De quantas maneiras podemos seleccionar k pessoas numa mesa redonda com n pessoas (e n lugares) de modo a nunca escolher pessoas que estejam sentadas lado a lado?
   Sugestão: Fixe-se uma pessoa X e divida-se o problema nos dois casos em que X é ou não seleccionado.

21. a) De quantas maneiras podemos escolher um conjunto de bolas de entre 7 bolas azuis, 9 bolas vermelhas e 10 bolas brancas?
   b) Dados conjuntos disjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_m$ tais que $|X_i| = k_i$, de quantas maneiras podemos escolher um subconjunto de
$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$$

que não contenha mais do que um elemento de cada X_i?
E se $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_m$?

c) Se $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$ é a factorização de m em factores primos, quantos divisores tem m?

22. Qual o número de resultados possíveis quando se lançam três dados simultâneamente? Cada dado tem as faces todas diferentes mas os dados são todos iguais.

23. Quantas soluções em inteiros existem para o sistema

$$0 < x < y < z < 25?$$

24. Distribuem-se 200 bolas por 100 caixas; nenhuma caixa fica vazia e nenhuma caixa contém mais que 100 bolas. Mostrar que é possível dividir as caixas em dois grupos de modo a que as caixas de cada grupo contêm ao todo 100 bolas.
Sugestão Designando por x_i o número de bolas da caixa c_i, considerar as classes módulo 100 das somas

$$s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$