1 Introdução à Combinatória Enumerativa: O Princípio de Inclusão-Exclusão

Dados conjuntos finitos X, Y tem-se

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

Do mesmo modo

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$

uma vez que os elementos que pertencem a $X \cap Y \cap Z$ são somados primeiro três vezes e depois subtraídos de novo três vezes, pelo que é preciso voltar a somá-los.

Exemplo 1.1 *A dedução, feita atrás, da fórmula para o número de funções* $f : [k] \to [n]$ *sobrejectivas, com* $n = 3$*, pode ser reinterpretada à luz destas observações: se, para cada* $i \in [3]$*, designarmos por* X_i *o conjunto das funções* $f : [k] \to [3]$ *que não tomam o valor* i*, ou seja,*

$$X_i = \{f : [k] \to [3] : \forall x \in [k]\, f(x) \neq i\},$$

o conjunto das funções $f : [k] \to [3]$ *sobrejectivas tem* $3^k - |\cup_{i=0}^{3} X_i|$ *elementos; mas* $|X_i| = 2^k$*, uma vez que* X_i *é o conjunto de todas as funções de* $[k]$ *num conjunto de* 2 *elementos* $[3]\backslash\{i\}$*; além disso, para quaisquer* $i, j \in [3]$ *distintos* $|X_i \cap X_j| = 1$*; e, neste caso,* $X_0 \cap X_1 \cap X_2 = \emptyset$*.*
Portanto, pela observação anterior,

$$|\{f : [k] \to [3] \text{ sobrejectivas }\}| = 3^k - \left(3 \times 2^k - 3 \times 1 + 0\right).$$

Para generalizar esta abordagem a este e outros problemas temos que responder à pergunta: dados conjuntos $X_1, \cdots, X_n$ como calcular $|\cup_{i=1}^{n} X_i|$?
A resposta é dada pelo

Teorema 1.2 (Princípio de Inclusão-Exclusão) *Dados conjuntos* $X_1, X_2, \cdots, X$ *designando por* S_j *a soma do número de elementos das intersecções de* j *conjuntos, ou seja*

$$S_j = \sum_{i_1 < \cdots < i_j} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}|$$

tem-se

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} S_j$$

Demonstração 1.3 *: A demonstração faz-se mostrando que o lado direito da igualdade conta cada elemento de* $\cup_{i=1}^{n} X_i$ *exactamente uma vez.*
Suponhamos que $x \in \cup_{i=1}^{n} X_i$ *pertence a exactamente* k *dos conjuntos. Então* $x \in X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}$ *se e só se os conjuntos presentes na intersecção pertencerem à família daqueles* k *conjuntos. Podemos escolher* j *desses* k *de* $\binom{k}{j}$ *maneiras, logo o lado direito da igualdade conta o elemento* x

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = -\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j}$$

vezes. Por outro lado, sabemos que

$$(1+x)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j = 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^j$$

Fazendo $x = -1$ *obtemos*

$$0 = 1 + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}$$

donde se conclui o resultado.

Nota 1.4 : *A ideia de calcular quantas vezes um elemento "é contado" numa expressão envolvendo números de elementos de conjuntos, pode ser formalizada do seguinte modo: dado um conjunto X, um subconjunto $Y \subset X$ identifica-se, como vimos já, com uma função*

$$f_Y : X \to \{0,1\} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in Y \\ \\ 0 & se\ x \notin Y \end{cases}$$

Essas funções podem ser somadas e multiplicadas, tendo-se aliás, como se verifica facilmente,

$$f_{X\cap Y} = f_X \times f_Y, \qquad f_{X\cup Y} = f_X + f_Y - f_{X\cap Y}$$

A fórmula do Princípio de Inclusão-Exclusão pode então ser interpretada como uma igualdade entre funções

$$f_{\cup X_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{X_{i_1}} \times \cdots \times f_{X_{i_k}}$$

Exemplo 1.5 : *Calcular o número de funções sobrejectivas $f : [k] \to [n]$. Se designarmos por X_i, com $1 \leq i \leq n$, o conjunto de funções cuja imagem não contém o elemento i, o número que queremos é*

$$n^k - |\cup_{i=1}^{n} X_i|$$

Ora, para cada i, $|X_i| = (n-1)^k$, e mais geralmente, dada uma escolha de j elementos de $[n]$

$$|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}| = (n-j)^k$$

uma vez que as funções presentes em $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}$ podem tomar quaisquer dos $n-j$ valores não proibidos e só esses. Como podemos escolher j elementos de $\binom{n}{j}$ maneiras temos, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão que

$$|\cup_{i=1}^{n} X_i| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

e portanto o número de funções sobrejectivas pedido é

$$n^k - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k = n^k + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Recorde-se que este número é também igual a $n!S(k,n)$ e portanto obtemos a fórmula anunciada atrás para os números de Stirling de segunda espécie:

$$S(k,n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Exemplo 1.6 : *Calcular o número de desarranjos de $[n]$, ou seja o número de permutações $\sigma : [n] \to [n]$ tais que $\sigma(i) \neq i$ para todo o i.*

Existem $n!$ permutações. Designando por X_i o conjunto das permutações σ tais que $\sigma(i) = i$, calculamos, tal como no exemplo anterior,

$$n! - |\cup_{i=1}^n X_i|$$

Dados j elementos $i_1, \cdots, i_j$ em $[n]$, as permutações em $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}$ fixam aqueles j elementos e reordenam os restantes; temos portanto

$$|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}| = (n-j)!$$

Logo, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão

$$|\cup_{i=1}^n X_i| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)!$$

e o número de desarranjos é

$$n! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)! = n! + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Exemplo 1.7 *A fórmula da função ϕ de Euler pode ser obtida por aplicação deste princípio: se $n = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}$, seja, para cada $1 \le i \le r$,*

$$X_i = \{x : 1 \le x \le n \text{ e } p_i \mid x\};$$

portanto $\phi(n) = n - | \cup_{i=1}^r X_i|$. Mas $|X_i| = \frac{n}{p_i}$ e, mais geralmente, para quaisquer $i_1, \cdots, i_j$

$$|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}}.$$

Pelo Princípio de Inclusão -Exclusão

$$\phi(n) = n - \sum_{1 \le i \le r} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le r} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots + (-1)^r \frac{n}{p_1 \cdots p_r}$$

Mas é fácil ver que esta expressão é igual a

$$n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Os dois primeiros exemplos são muito simétricos: o número de elementos numa intersecção de j conjuntos só depende de j e não dos conjuntos em particular. Isso não é verdade em geral.

Exemplo 1.8 *: Quantas palavras de 8 letras se podem escrever, usando apenas vogais, que não contenham a sequência UAU?*

Existem 5^8 palavras de 8 letras no alfabeto $\{A, E, I, O, U\}$; contamos aquelas em que aparece a sequência UAU, usando o Princípio de Inclusão e Exclusão: seja X_i ($1 \le i \le 6$) o conjunto das palavras em que UAU aparece a começar na posição i.
Temos $|X_i| = 5^5$ para todo o i; mas a sequência pode ocorrer duas vezes, sem sobreposição (e deixando portanto duas posições livres)

$$|X_1 \cap X_4| = |X_1 \cap X_5| = |X_1 \cap X_6| = |X_2 \cap X_5| = |X_2 \cap X_6| = |X_3 \cap X_6| = 5^2$$

ou com sobreposição (deixando três posições livres)

$$|X_1 \cap X_3| = |X_2 \cap X_4| = |X_3 \cap X_5| = |X_4 \cap X_6| = 5^3$$

Para três ocorrências temos também dois casos:

$$|X_1 \cap X_3 \cap X_6| = |X_1 \cap X_4 \cap X_6| = 1$$

enquanto que

$$|X_1 \cap X_3 \cap X_5| = |X_2 \cap X_4 \cap X_6| = 5$$

Não pode haver mais do que três ocorrências da sequência UAU. *Assim a resposta final é*

$$5^8 - 6 \times 5^5 + (6 \times 5^2 + 4 \times 5^3) - (2 \times 1 + 2 \times 5) = 372513$$

Esta dedução é claramente menos satisfatória do que a que feita noutros problemas, exactamente porque o número de elementos das intersecções $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}$ não depende só de j mas também dos conjuntos considerados em cada caso.
No problema seguinte vamos usar, num problema ligeiramente diferente, uma outra forma de aplicação do Princípio de Inclusão-Exclusão:

Exemplo 1.9 *Quantas sequências de* n *vogais não contêm o bloco* ***AEIOU****?*

Seja X_k *o conjunto das sequências com exactamente* k ***AEIOU****;*

definindo $m = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$, *queremos* $| \cup_{k=1}^{m} X_k| = \sum_{k=1}^{m} |X_k|$.

Seja Y_j *o conjunto de sequências construídas usando* j *blocos* ***AEIOU****. Note-se que* Y_j *não conta as sequências que têm pelo menos* j *blocos AEIOU, mas o número de maneiras de as construir usando esses blocos como se fossem letras. Temos*

$$|Y_j| = 5^{n-5j} \binom{j+n-5j}{j}$$

Em $|Y_j|$, *cada sequência de* X_k *é contada* $\binom{k}{j}$ *vezes. Logo*

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} |Y_j| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^{m} \binom{k}{j} |X_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |X_k| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = \sum_{k=1}^{m} |X_k|$$

Ou seja

$$\sum_{k=1}^{m} |X_k| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \binom{n-4j}{j} 5^{n-5j}.$$

Nota 1.10 *Podemos aplicar a mesma ideia ao exemplo anterior, desde que consideremos não apenas blocos* ***UAU*** *mas também* ***UAUAU****, etc.*

1.1 Exercícios

1. Quantas palavras de 10 letras não contêm todas as vogais?

2. Quantas soluções existem de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100, \qquad 0 \leq x_i \leq 40$$

3. De quantas maneiras podemos ordenar o conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ de modo a obter pelo menos uma das sequências

$$1, 2, 3 \qquad 3, 4, 5 \qquad 4, 5, 6?$$

4. De quantas maneiras podemos ordenar o conjunto $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ de modo a que nenhum n seja seguido por $n + 1$?

5. De quantas maneiras podemos distribuir n bolas, todas iguais, a k pessoas, na condição de cada pessoa receber 3, 4 ou 5 bolas?

6. De quantas maneiras podemos alinhar 3 bolas brancas, 4 bolas azuis e 5 bolas verdes na condição de as bolas de cada cor não ficarem todas juntas?

7. De quantas maneiras podemos escolher 7 cartas num baralho de modo a ficarmos com cartas de todos os naipes?

8. Quantos subconjuntos de 10 letras do alfabeto não contêm duas letras consecutivas?

9. Quantos inteiros $1 \leq n \leq 10^6$ não são de nenhuma das formas m^2, m^3, m^5, sabendo que $15^5 < 10^6 < 16^5$?

10. Quantas soluções existem de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$$

com a condição

$$x_i \in \mathbb{Z}, \qquad -10 \leq x_i \leq 20\,?$$

11. Quantos alinhamentos de seis **A**, oito **B** e cinco **C** é que contêm a sequência **ABBA**? .

12. Determinar uma fórmula para o número de maneiras de alinhar 40 bolas brancas e 40 bolas pretas, de modo a que não haja mais do 3 bolas brancas seguidas.

13. De quantas maneiras podemos sentar n casais numa mesa redonda de modo a que os homens e as mulheres fiquem intercalados mas nenhum casal fique lado a lado?

1.2 Generalizações

A fórmula do Princípio de Inclusão e Exclusão pode ser generalizada:

Proposição 1.11 : *Dados conjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_n$, designando por S_k a soma do número de elementos das intersecções de k conjuntos, ou seja*

$$S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}|$$

tem-se que o número de elementos contido em exactamente l dos conjuntos é dado por

$$\sum_{k=l}^{n} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} S_k$$

e o número de elementos contido em pelo menos l dos conjuntos é dado por

$$\sum_{k=l}^{n} (-1)^{k-l} \binom{k-1}{l-1} S_k$$

Demonstração 1.12 : *Copiando o raciocínio feito para a demonstração do Princípio de Inclusão e Exclusão, considere-se um elemento x contido em exactamente p dos conjuntos X_i. Vamos ver que a primeira fórmula conta x uma vez se $p = l$ e zero vezes caso contrário:*
Se $p < l$, x é evidentemente contado zero vezes, pois x não pode pertencer à intersecção de $k > p$ conjuntos. Se $l \leq p$, a fórmula conta x

$$\sum_{k=l}^{n} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \binom{p}{k} = \sum_{k=l}^{p} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \binom{p}{k}$$

vezes, pois há $\binom{p}{k}$ escolhas dos índices $i_1 < \cdots < i_k$ para as quais $x \in X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}$ e além disso se $k > p$ temos $\binom{p}{k} = 0$ (o que corresponde ao *facto de que, tal como anteriormente,x não pode pertencer à intersecção de $k > p$ conjuntos). Mas*

$$\sum_{k=l}^{p}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\binom{p}{k} = \sum_{k=l}^{p}(-1)^{k-l}\binom{p}{l}\binom{p-l}{k-l} =$$

$$= \binom{p}{l}\sum_{k=l}^{p}(-1)^{k-l}\binom{p-l}{k-l} = \binom{p}{l}\sum_{j=0}^{p-l}(-1)^{j}\binom{p-l}{j} = \begin{cases} 0 & se\ p > l \\ 1 & se\ p = l \end{cases}$$

A segunda fórmula pode ser deduzida da anterior: se C_l designa o conjunto dos elementos contido em pelo menos l dos conjuntos X_i, e B_j o conjunto dos elementos contido em exactamente j dos conjuntos X_i, temos

$$C_l = \bigcup_{j=l}^{n} B_j$$

que é uma união disjunta e portanto

$$|C_l| = \sum_{j=l}^{n}|B_j| = \sum_{j=l}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}S_k =$$

$$= \sum_{k=l}^{n}\sum_{j=l}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}S_k = \sum_{k=l}^{n}S_k\sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k}{k-s} = \sum k = l^n(-1)^{k-l}\binom{k-1}{l-1}S_k$$

uma vez que

$$\sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k}{k-s} = \sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k}{s} = \sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\left(\binom{k-1}{s} + \binom{k-1}{s-1}\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k-1}{s} + \sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k-1}{s-1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{k-l}(-1)^{s}\binom{k-1}{s} + \sum_{s=-1}^{k-l-1}(-1)^{s+1}\binom{k-1}{s} = \binom{k-1}{-1} + (-1)^{k-l}\binom{k-1}{k-l}$$

A secção seguinte é opcional e só se aconselha o seu estudo depois de o material anterior estar bem compreendido.

1.2.1 Formulação abstracta do Princípio de Inclusão - Exclusão

Uma outra forma de considerar o Princípio de Inclusão - Exclusão, e que é muitas vezes a que ocorre num problema de contagem, passa por definir subconjuntos de um conjunto dado em termos de propriedades: se P for um conjunto de propriedades que os elementos de um conjunto X possuem ou não, podemos definir, para cada $T \subset P$,

$$f(T) = |\{x \in X : x \text{ satisfaz todas as propriedades } t \in T\}|,$$

$$g(T) = |\{x \in X : x \text{ satisfaz exactamente as propriedades } t \in T\}|.$$

Nota 1.13 *Uma maneira de exprimir estas condições é associar a cada propriedade $t \in P$ a função $\eta_t : X \to [2]$ tal que*

$$\eta_t(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \textit{ satisfaz a propriedade } t \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Então os valores $f(T)$ e $g(T)$ definidos acima podem ser dados por

$$f(T) = \sum_{x \in X} \prod_{t \in T} \eta_t(x), \qquad g(T) = \sum_{x \in X} \prod_{t \in T} \eta_t(x) \prod_{t \notin T} (1 - \eta_t(x)).$$

As aplicações do Princípio de Inclusão - Exclusão ao cálculo do número de elementos de uma união

$$\bigcup_{i=1} n X_i = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$$

de subconjuntos de um certo conjunto X interpretam-se aqui da seguinte maneira: temos o conjunto P de propriedades $\{p_i : 1 \leq i \leq n\}$, onde a propriedade p_i é pertencer ao conjunto X_i. Calcular $|X \setminus \bigcup_{i=1} n X_i|$ significa calcular $g(\emptyset)$.

A definição destas funções implica que, para qualquer $T \subset P$

$$f(T) = \sum_{T \subset S} g(S).$$

Por outro lado, para calcular $g(T)$ em função de valores de f, temos que subtrair a $f(T)$ o número dos $x \in X$ que satisfazem mais alguma propriedade além das que pertencem a T; podemos subtrair $\sum_S f(S)$ onde os S são os conjuntos da forma $T \cup \{p\}$ para alguma propriedade $p \in P \setminus T$, mas nesse caso estamos a subtrair a mais o número dos x que satisfazem pelo menos duas propriedades, além das contidas em T, pelo que temos que somar, e assim por diante.

Chegamos assim à seguinte formulação mais abstracta do Princípio de Inclusão-Exclusão: dado um conjunto finito P,designamos por 2^P o conjunto das partes de P, ou seja,

$$2^P = \{S \subset P\}.$$

Teorema 1.14 *Dadas duas funções f e g com domínio 2^P e valores inteiros, tem-se a equivalência*

$$\forall T \subset P \ f(T) = \sum_{S \supset T} g(S) \Leftrightarrow \forall T \subset P \ g(T) = \sum_{S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} f(S)$$

Nota 1.15 *A hipótese de as funções tomarem valores inteiros é irrelevante. O teorema é válido para funções com contradomínio $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou outros ainda.*

Demonstração 1.16 *A implicação $\Rightarrow$ deduz-se de*

$$\sum_{S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} f(S) = \sum_{S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} \sum_{U \supset S} g(U) = \sum_{U \supset T} \left(\sum_{U \supset S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} \right) g(U);$$

mas, se $U \setminus T$ tem m elementos, podemos escolher um conjunto S satisfazendo $T \subset S \subset U$ e com $|T| + l$ elementos (onde $0 \leq l \leq m$) de $\binom{m}{l}$ maneiras e portanto

$$\sum_{U \supset S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^l = \begin{cases} 0 & se\ m > 0 \\ 1 & se\ m = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que

$$\sum_{U \supset T} \left(\sum_{U \supset S \supset T} (-1)^{|S|-|T|} \right) g(U) = g(T)$$

como queríamos provar.
A implicação $\Leftarrow$ deduz-se de forma idêntica, notando que a igualdade do lado direito do enunciado implica que

$$\sum_{S \supset T} g(S) = \sum_{S \supset T} \sum_{V \supset S} (-1)^{|V|-|S|} f(V) = \sum_{V \supset T} \left(\sum_{T \subset S \subset V} (-1)^{|V|-|S|} \right) f(V),$$

e calculando a soma interior como anteriormente.

Nota 1.17 *Podemos também enunciar uma versão simétrica daquela:*

Teorema ***1.18*** *Dadas duas funções f e g com domínio 2^P e valores inteiros, tem-se a equivalência*

$$\forall T \subset P \ f(T) = \sum_{S \subset T} g(S) \Leftrightarrow \forall T \subset P \ g(T) = \sum_{S \subset T} (-1)^{|S|-|T|} f(S)$$

A demonstração (que se deixa como exercício) faz-se aplicando a versão original ao par de funções definidas por

$$w(T) = f(P \setminus T), \ z(T) = g(P \setminus T) \ \ \forall T \subset P.$$

Vimos que em muitos dos casos os valores $f(T)$ só dependem da cardinalidade de T, ou seja, existem inteiros não negativos a_i definidos por

$$|T| = i \implies f(T) = a_{n-i};$$

(esta maneira de definir o índice permite obter uma fórmula mais simples, como veremos já a seguir).
Nesse caso, o teorema provado acima implica que o mesmo acontece com os valores de g: existem inteiros não negativos b_i tais que

$$|T| = i \implies g(T) = b_{n-i}$$

e temos as igualdades (equivalentes)

$$b_m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_j, \qquad a_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} b_m,$$

para todo o $0 \leq m \leq n$.
Esta dedução fica como exercício.