1 Permutações

Dado $[n] = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ (qualquer conjunto com n elementos pode ser identificado com este) consideramos o conjunto S_n de todas as bijecções $f : [n] \to [n]$, ou permutações de $[n]$.

Sabemos já que $|S_n| = n!$.

Uma permutação π pode ser representada indicando numa tabela os valores de $\pi(x)$ para todos os $x \in [n]$. Por exemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo bijecções de um conjunto nele próprio, as permutações podem ser compostas umas com as outras, obtendo-se novas permutações. Por exemplo, se π é a permutação definida anteriormente e

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $\pi \circ \rho(x) = \pi(\rho(x))$.
No que se segue, representaremos abreviadamente $\pi \circ \rho$ por $\pi\rho$, não havendo perigo de confusão com outras operações. Em particular $\pi \circ \pi = \pi^2$, etc.

É importante notar que a composição de permutações é associativa

$$\pi(\rho\tau) = (\pi\rho)\tau, \qquad \forall \pi, \rho, \tau \in S_n,$$

mas não é (em geral) comutativa.
Existe um elemento neutro para a composição, a permutação identidade

$$\iota : [n] \to [n], \ \iota(x) = x, \forall x$$

e todo o elemento $\pi \in S_n$ tem um inverso que representamos por π^{-1}. Por exemplo, para o exemplo acima

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto S_n é um conjunto fechado para uma operação associativa, existindo um elemento neutro e tal que todo o elemento tem um inverso. Este conjunto de propriedades resume-se dizendo que S_n munido da operação de composição é um **grupo** .

O grupo S_n tem uma representação matricial: a cada permutação π fazemos corresponder a matriz M_π com n linhas e n colunas definida por

$$M_\pi(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi(j) = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(onde as linhas e colunas foram indexadas pelos elementos de $[n]$ e não como habitualmente por $1, \cdots, n$).
Estas matrizes de permutação podem ser caracterizadas como as matrizes quadradas de dimensão n com entradas iguais a 0 ou 1 e que têm exactamente um 1 em cada linha e em cada coluna.
Como se verifica facilmente, a matriz M_π foi definida de modo a que se tenha

$$M_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

Deduz-se então que

$$M_{\pi\circ\rho} = M_\pi \cdot M_\rho$$

ou seja, a composição de permutações "traduz-se" no produto de matrizes.

1.1 Decomposição cíclica de permutações

Dado $x \in [n]$, a sucessão

$$x, \pi(x), \pi^2(x), \cdots$$

onde π^2 designa a composição $\pi \circ \pi$ e do mesmo modo π^j a composição $\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi$ (j vezes), chama-se a **órbita** de x pela permutação π. Como $[n]$ é finito, qualquer órbita é também finita. Mais do que isso, como as permutações são bijecções, existe sempre um $k \leq n$ tal que $\pi^k(x) = x$ e portanto a órbita de x por π é um **ciclo**

$$(x, \pi(x), \cdots, \pi^{k-1}(x))$$

Num ciclo não importa qual o elemento que representamos como primeiro, mas apenas a ordem em que elementos ocorrem; portanto, por exemplo,

$$(\pi(x), \cdots, \pi^{k-1}(x), x)$$

representa o mesmo ciclo .

Dada π e $x, y \in [n]$, os ciclos de x e de y por π ou coincidem ou são disjuntos. Cada permutação tem portanto uma decomposição cíclica. Nos exemplos anteriores,

$$\pi = (0, 1, 3, 2, 4) \qquad \rho = (0, 2)(1)(3, 4)$$

Note-se que na representação de ρ acima não importa também a ordem por que apresentamos os ciclos; podemos igualmente representar $\rho = (3, 4)(1)(2, 0)$. É também usual omitir os ciclos de comprimento 1, ou seja os elementos em que a permutação actua como a identidade.

Definição 1.1 *O **tipo cíclico** de uma permutação é a lista dos números de ciclos de cada comprimento. Representamos um tipo como $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ onde α_i é o número de ciclos de comprimento i.*

Duas permutações π eρ dizem-se **conjugadas** se existe uma permutação τ tal que

$$\tau\pi = \rho\tau$$

ou seja se representam a mesma transformação a menos de uma "mudança de variáveis".
A relação de conjugação é uma relação de equivalência definida no grupo S_n (e mais geralmente em qualquer grupo).

Proposição 1.2 : *Duas permutações são conjugadas se e só se têm o mesmo tipo cíclico.*

Definição 1.3 : *O número de Stirling de primeira espécie (sem sinal) $c(n, k)$ é o número de permutações de n elementos com k ciclos.*

$c(n, k)$ pode ser descrito como o número de modos de sentar n pessoas em k mesas redondas sem que nenhuma mesa fique vazia (para que esta descrição seja precisa, há que esclarecer que as mesas não se distinguem umas das outras e que é possível sentar até $n - k + 1$ pessoas numa mesa).

Proposição 1.4 *O número de permutações de tipo $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ é*

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n}\alpha_1!\cdots\alpha_n!}$$

1.2 Transposições e paridade de uma permutação

Uma permutação cíclica que só permuta dois elementos chama-se uma **transposição**. Qualquer permutação se pode representar como composição de transposições. Isso decorre do facto de qualquer ciclo se poder obter como composição de transposições; por exemplo:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_1, x_k)\cdots(x_1, x_i)\cdots(x_1, x_4)(x_1, x_3)(x_1, x_2)$$

Mas essa representação não é única. Por exemplo

$$(0,1,2,3,4) = (0,4)(0,3)(0,2)(0,1) = (0,3)(2,4)(3,4)(1,3)(2,3)(0,2)$$

Exercícios

1. Em quantas permutações $\pi \in S_n$ $(n > 2)$ é que 1 e 2 pertencem ao mesmo ciclo? Quantas permutações têm exactamente dois ciclos?

2. Para um $k \leq n$ fixo qualquer,

   a) em quantas permutações $\pi \in S_n$ é que 1 pertence a um ciclo de comprimento k (abreviadamente, um k-ciclo)?

   b) quantas permutações $\pi \in S_n$ têm (pelo menos) um k-ciclo?

3. Quantas permutações $\pi \in S_n$ satisfazem a condição $\pi^5(x) = x \ \forall x \in [n]$? E se for $\pi 6(x) = x$?