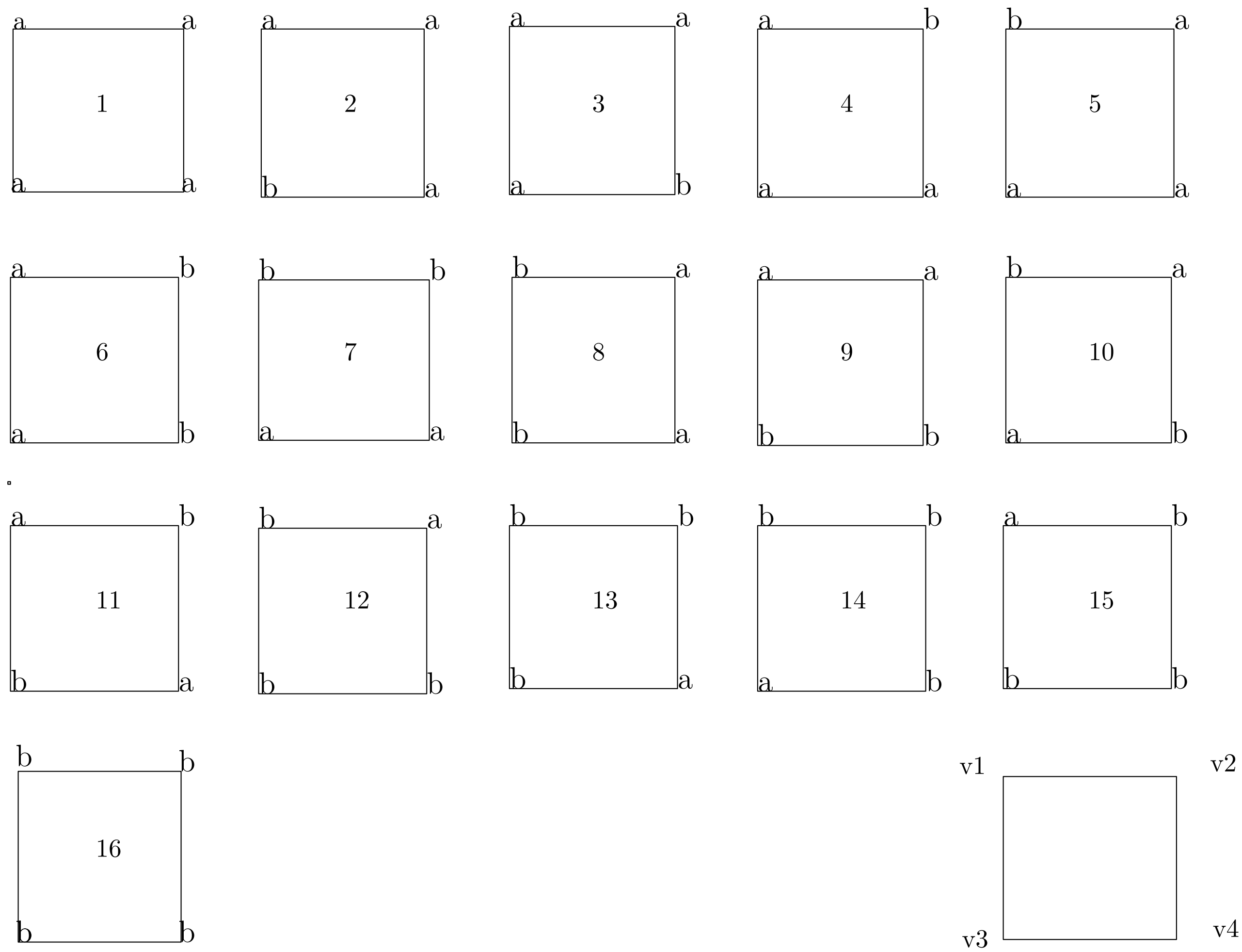
1 Contagem com simetria

Em alguns problemas de combinatória enumerativa, procuramos contar objectos que estão condicionados por alguma forma de simetria. O exemplo mais simples é o dos modos de sentar n pessoas numa mesa redonda; deduzimos que havia $(n-1)!$ modos começando por sentar uma das pessoas num lugar qualquer e contando depois os modos de sentar as restantes $n-1$.
Podemos interpretar esta contagem do seguinte modo: a mesa pode ser vista como um polígono regular de n lados, com um grupo de simetrias obtidas por rotação (que são as únicas que nos interessam neste caso). Cada escolha de lugares corresponde a atribuir uma etiqueta a cada lado (ou vértice, é indiferente); se fixarmos um lugar inicial como referência, vemos que cada uma das escolhas corresponde a uma das $n!$ maneiras de ordenar n etiquetas. Mas duas escolhas que sejam identificadas por uma rotação podem ser consideradas idênticas; concluímos então que queremos de facto contar classes de equivalência de escolhas de lugares, em que duas escolhas são equivalentes se podemos transformar uma na outra por uma simetria. Neste caso, cada classe contém exactamente n escolhas e portanto existem $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ classes.

Considere-se agora o problema de contar quantos colares diferentes de n contas se podem fazer com contas de dois tipos. Na figura anexa, podem ver-se todas as maneiras de por etiquetas a ou b nos vértices de um quadrado. Considerando duas delas como equivalentes se se puderem transformar uma na outra por uma rotação ou reflexão, verifica-se facilmente que existem 6 classes de equivalência. Ou seja, existem 6 colares de 4 contas feitos com contas de dois tipos.



Vamos agora tratar sistematicamente o problema de contar com simetria, tomando este exemplo simples como guia. Para clarificar a descrição, vamos designar os vértices por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, começando com v_1 como vértice superior esquerdo e seguindo a orientação dos ponteiros do relógio. Temos um conjunto C (neste caso, as colorações com 2 cores dos vértices do polígono). E existe um determinado grupo de simetrias G (neste caso o grupo de permutações dos vértices induzidas por simetrias do polígono) que actua neste conjunto: por exemplo, a permutação cíclica σ dos vértices induzida por uma

rotação de $\pi/2$, no sentido dos ponteiros do relógio, $\sigma = (v_1 v_2 v_3 v_4)$, induz uma transformação de colorações que transforma a coloração 2 na 5, a 6 na 9, etc. Já a permutação ρ induzida por uma reflexão sobre o eixo vertical, $\rho = (v_1 v_2)(v_3 v_4)$, transforma 2 em 3, 6 em 8, etc.
Usamos a notação $\sigma^*(2) = 5$ para indicar que a permutação (de vértices) σ transforma a coloração 2 na 5.

Dois elementos de C, t e s, são considerados equivalentes se existe $\pi \in G$ tal que $\pi^*(t) = s$. Este tipo de relação é também descrita dizendo que t e s estão na mesma **órbita** pela acção de G. Esta relação é de facto uma relação de equivalência e portanto estabelece uma partição de C em conjuntos disjuntos, que são as órbitas.
O nosso objectivo é contar o número ω de classes de equivalência (ou seja, de órbitas) de C.

Podemos descrever mais precisamente a maneira como as permutações transformam as colorações se virmos cada coloração t como uma função do conjunto dos vértices no conjunto das cores.
Temos então que a igualdade $\pi^*(t) = s$ define a nova coloração s do seguinte modo: para cada vértice v,

$$s(v) = t(\pi^{-1}(v)),$$

e temos as propriedades

i) a permutação identidade ι satisfaz $\iota^*(t) = t$ para toda a coloração t;

ii) $(\pi \circ \sigma)^*(t) = \pi^*(\sigma^*(t))$;

iii) se $\pi \neq \sigma$ então existe pelo menos uma coloração t tal que $\pi^*(t) \neq \sigma^*(t)$.

Vamos usar as seguintes notações:

para cada $x \in C$,

$$O_x = \{y \in C | \exists \pi \in G : \pi^*(x) = y\},$$

ou seja, O_x é o conjunto dos elementos equivalentes a x pela acção de G; no nosso caso, por exemplo,

$$O_2 = \{2, 3, 4, 5\}, \qquad O_{10} = \{10, 11\}, \qquad O_1 = \{1\}$$

;

para cada $x \in C$,

$$E(x) = \{\pi \in G | \pi^*(x) = x\},$$

ou seja, $E(x)$ é o conjunto dos elementos de G que fixam x; note-se que este conjunto é sempre um subgrupo de G (o **subgrupo estabilizador** de x), ou seja,

- a permutação identidade ι satisfaz $\iota \in E(x)$;
- se $\pi \in E(x)$ então $\pi^{-1} \in E(x)$;
- se $\pi, \sigma \in E(x)$ então $\pi \circ \sigma \in E(x)$.

Por exemplo, no nosso caso, com as designações já usadas acima,

$$E(10) = \{1, \sigma\rho = (v_1 v_3), \rho\sigma = (v_2 v_4), \sigma^2 = (v_1 v_3)(v_2 v_4)\}$$

enquanto que, obviamente, $E(1) = G$;

para cada $\pi \in G$,

$$I(\pi) = \{x \in C | \pi^*(x) = x\},$$

ou seja, $I(x)$ é o conjunto dos elementos de C que são fixos pela acção de π, ou seja, o **conjunto invariante** de π; mais uma vez no nosso caso, temos por exemplo,

$$I(\sigma) = \{1, 16\}, \qquad I(\rho) = \{1, 6, 8, 16\}, \qquad I(\sigma^2) = \{1, 10, 11, 16\}$$

Intuitivamente, se o subgrupo $E(x)$ for grande, a órbita O_x será pequena e vice-versa. De facto, temos uma relação precisa entre os dois:

Proposição 1.1 : *Dado um elemento $x \in C$, $|O_x| \times |E(x)| = |G|$.*

Demonstração 1.2 : *Consideramos a função*

$$\psi : G \to C$$

que faz corresponder a cada $\pi \in G$ *o elemento* $\pi^*(x) \in C$. *A imagem de* ψ *é* O_x.
Fixemos um elemento qualquer $y \in O(x)$ *e uma permutação* λ *que satisfaz* $\lambda^*(x) = y$; *se* $\pi \in E(x)$, *então*

$$(\lambda\pi)^*(x) = \lambda^*(\pi^*(x)) = y;$$

mas, reciprocamente, se $\sigma^*(x) = y = \lambda^*(x)$, *então*

$$(\lambda^{-1}\sigma)^*(x) = x,$$

ou seja $\lambda^{-1}\sigma \in E(x)$ *e portanto* σ *é a composição de* λ *com um elemento de* $E(x)$:

$$\sigma = \lambda(\lambda^{-1}\sigma).$$

Concluímos que

$$\{\sigma \in G : \sigma^*(x) = y\} = \{\lambda\pi : \pi \in E(x)\}$$

e portanto cada elemento de O_x *é a imagem por* ψ *de exactamente* $|E(x)|$ *permutações.*

A demonstração anterior mostra que se dois elementos x e y estão na mesma órbita, ou seja $O_x = O_y$, então $|E(x)| = |E(y)|$. De facto, se $y = \pi(x)$ então

$$\tau \in E(y) \Leftrightarrow \pi^{-1}\tau\pi \in E(x).$$

Usamos esta observação para obter uma segunda igualdade: podemos escolher um elemento x_i, $1 \leq i \leq \omega$, de cada órbita; então

$$\sum_{x \in C} |E(x)| = \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(y)|$$

ou seja, para somar o número de elementos dos subgrupos estabilizadores de todos os elementos do conjunto, podemos somar para os elementos de cada órbita e depois somar as somas das diversas órbitas. Mas pela observação anterior, para elementos da mesma órbita, o número de elementos do estabilizador é constante, portanto

$$\sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(y)| = \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(x_i)| =$$
$$= \sum_{i=1}^{\omega} |O_{x_i}||E(x_i)| = \omega|G|$$

onde a última igualdade decorre da proposição anterior. Juntando as duas igualdades, provámos portanto a seguinte

Proposição 1.3 *:* $\omega = \dfrac{1}{|G|} \sum_{x \in C} |E(x)|$.

Esta igualdade não é no entanto a ferramenta adequada para calcular ω, uma vez que teríamos que fazer uma soma sobre todos elementos de C; no nosso caso teríamos que calcular o número de elementos do subgrupo estabilizador para cada uma das 16 colorações. Mas uma última igualdade melhora bastante a situação:

Lema 1.4

$$\sum_{x \in C} |E(x)| = \sum_{\sigma \in G} |I(\sigma)|$$

Demonstração 1.5 *A justificação desta igualdade é uma aplicação muito simples do princípio da dupla contagem: considere-se a matriz R cujas linhas são indexadas pelos elementos $x \in C$ e cujas colunas são indexadas pelos elementos $\sigma \in G$, tal que $R_{ij} = 1$ se $\sigma_j^*(x_i) = x_i$ e $R_{ij} = 0$ caso contrário (σ_j designa a permutação na posição j e x_i o elemento na posição i, naturalmente); se contarmos o número de 1 na matriz por linhas, obtemos a soma no lado esquerdo da igualdade, mas se os contarmos por colunas obtemos a soma no lado direito.*

O resultado final das igualdades provadas é a seguinte fórmula para o número ω de órbitas de C por acção de G:

Teorema 1.6 (Cauchy-Frobenius-Burnside) *:* $\omega = \dfrac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |I(\sigma)|$.

De acordo com este resultado, para contar o número de colorações realmente distintas no nosso exemplo (ou seja, o número de classes de equivalência de colorações), temos que contar quantas colorações ficam invariantes pela transformação induzida por cada permutação dos vértices do quadrado resultante de uma simetria deste.

Claramente, a identidade fixa todas as colorações: $|I(\iota)| = 16$; por outro lado, a permutação $\sigma = (v_1 v_2 v_3 v_4)$ só fixa as colorações 1 e 16 e o mesmo acontece com σ^3, logo $|I(\sigma)| = |I_{\sigma^3}| = 2$; já $\sigma^2 = (v_1 v_3)(v_2 v_4)$ fixa as colorações $1, 10, 11, 16$, $|I(\sigma^2)| = 4$; por outro lado, cada uma das permutações resultantes das reflexões sobre os eixos horizontal e vertical fixa 4 colorações, enquanto que as permutações resultantes das reflexões sobre as diagonais do quadrado fixam 8 colorações cada.
De acordo com o teorema, existem

$$\frac{16 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 8}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

classes de equivalência de colorações.

Vamos agora aplicar este resultado ao cálculo do número de colorações das faces de um cubo, com m cores.
O facto fundamental, já visível no exemplo anterior, que permite simplificar muito os cálculos é o seguinte:

Proposição 1.7 *: Dada uma permutação σ, o número $|I(\sigma)|$ depende apenas do número de cores m e do número de ciclos de σ. Se σ tem k ciclos, $|I(\sigma)| = m^k$.*

De facto, uma coloração com m cores dos objectos permutados por σ fica invariante por esta permutação se e só se os elementos de cada ciclo tiverem a mesma cor.

Exemplo 1.8 : *Para analisar as colorações das faces do cubo, é útil seguir os cálculos numa figura ou mesmo com um modelo tridimensional.*
Cada uma das rotações por um ângulo de $\pi/2$ sobre eixos unindo os centros de faces opostas induz uma permutação das faces com 3 ciclos: dois de comprimento 1 e um de comprimento 4; temos três eixos e duas rotações para cada um deles, uma no sentido directo e outra no sentido retrógrado; se a primeira induz a permutação ρ, a outra induz a permutação $\rho^{-1} = \rho^3$. Como existem 3 eixos face-face, temos portanto 6 permutações que contribuem com uma parcela $6m^3$.
Já cada rotação por um ângulo de π, sobre os mesmos eixos, corresponde a uma permutação ρ^2, que tem quatro ciclos, dois de comprimento 1 e dois de comprimento 2. Estas três permutações contribuem com $3m^4$ para a contagem das colorações.

A rotação por um ângulo de π sobre um eixo unindo os pontos médios de duas arestas opostas induz uma permutação com três ciclos de comprimento 2; como há seis eixos desses, temos seis permutações que contribuem com $6m^3$.

Finalmente, cada rotação por um ângulo de $2\pi/3$ ou de $4\pi/3$ sobre um eixo unindo vértices opostos induz uma permutação de faces com dois ciclos de comprimento 3; há quatro pares de vértices opostos e portanto oito permutações que contribuem com $8m^2$.

Somando, sem esquecer a permutação identidade, que fixa todas as m^6 colorações, obtemos

$$p(m) = \frac{1}{24}(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2)$$

colorações das faces do cubo feitas com m cores.

Note-se que este número inclui as colorações que usam apenas algumas destas m cores; para contar o número de colorações com exactamente m cores, temos que usar o princípio de Inclusão-Exclusão: se C_i designar as colorações que não usam a cor i, temos que calcular $|C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m|$; mas o número de colorações que não usam as cores $i_1, \cdots, i_k$ é igual ao número de colorações com $m-k$ cores; portanto, o número das colorações das faces do cubo que usam exactamente m cores é dado por

$$p(m) - mp(m-1) + \binom{m}{2} p(m-2) - \cdots = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} p(m-j)$$

Evidentemente, se $m > 6$ é impossível usar m cores e esta fórmula traduz correctamente esse facto.

Se considerarmos o problema de calcular o número de colorações dos vértices ou das arestas, temos que contar, para cada simetria do cubo, o número de ciclos da permutação induzida nos vértices ou arestas respectivamente.
Por exemplo, o número de colorações dos vértices de um cubo, com m cores possíveis, é dado por

$$\frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$$

Exemplo 1.9 *: Este exemplo é de natureza um pouco diferente e retoma uma ideia apresentada mais atrás. Suponhamos que queremos contar de quantas maneiras podemos distribuir 100 bolas iguais por 4 caixas também iguais, ficando cada caixa com pelo menos uma bola. Por outras palavras, recordando que $p_n(k)$ representa o número de partições de k numa soma de n parcelas positivas, queremos calcular $p_4(100)$.*

Se as caixas fossem diferentes, o problema seria já bem familiar: a solução seria $\binom{100-1}{3}$*, que é também o número de soluções de*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \qquad 1 \leq x_i \ \forall i.$$

A ideia é usar o Teorema de Cauchy-Frobenius-Burnside para descontar neste número o efeito de permutarmos as caixas. Ou seja, queremos identificar quaisquer duas soluções que se possam obter uma da outra por uma permutação das caixas, o mesmo é dizer dos x_i*. Por exemplo, as quatro soluções*

$$1 + 1 + 1 + 97, 1 + 1 + 97 + 1, 1 + 97 + 1 + 1, 97 + 1 + 1 + 1,$$

contadas como diferentes no caso de caixas diferentes, correspondem a uma única solução no problema das caixas iguais.

O grupo de permutações neste caso é o grupo S_4 *de todas as permutações de quatro objectos, que tem* 24 *elementos:*

1. *a identidade* $\iota = (1)(2)(3)(4)$*;*
2. $\binom{4}{2}$ *permutações do tipo* $\rho = (a, b)(c)(d)$*;*
3. $\frac{1}{2}\binom{4}{2}$ *permutações do tipo* $\sigma = (a, b)(c, d)$*;*
4. 4×2 *permutações do tipo* $\tau = (a, b, c)(d)$*;*
5. $3!$ *permutações do tipo* $\delta = (a, b, c, d)$*.*

Por exemplo, as permutações com dois ciclos de comprimento 2 *são*

$$(1, 2)(3, 4), \qquad (1, 3)(2, 4), \qquad (1, 4)(2, 3)$$

De acordo com o teorema, temos que contar para cada permutação, o número de distribuições de bolas pelas caixas ou, de acordo com a descrição que vamos usar a seguir, de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \qquad 1 \leq x_i \ \forall i$$

que ficam invariantes sob a acção dessa permutação.

Para a identidade, é óbvio que

$$I(\iota) = \binom{99}{3},$$

ou seja, todas as soluções ficam invariantes.
Para uma permutação do segundo tipo $\rho = (a, b)(c)(d)$, *uma solução fica invariante se e só se* $x_a = x_b$. *Procuramos portanto o número de soluções em inteiros positivos de*

$$2x + y + z = 100.$$

Ora x *pode tomar qualquer valor entre* $1 \leq j \leq 49$ *e para cada* j *podemos distribuir as restantes* $100-2j$ *unidades pelas outras duas variáveis de* $99-2j$ *maneiras (*y *pode tomar qualquer valor entre* 1 *e* $100-2j-1$*). Temos então*

$$\sum_{j=1}^{49}(99-2j) = 99 \times 49 - 2\sum_{j=1}^{49} j = 49^2.$$

Para o terceiro tipo procuramos analogamente o número de soluções de

$$2x + 2y = 100$$

pois temos que ter dois pares de variáveis (ou caixas...) com o mesmo valor (número de bolas). Como se verifica facilmente, o número de soluções é 49 *(número de valores, entre* 1 *e* 49 *que* x *pode tomar). Logo* $I(\sigma) = 49$.
Uma solução que fica invariante por uma permutação de tipo $(a, b, c)(d)$ *corresponde a uma solução de*

$$3x + y = 100;$$

cada solução desta equação é determinada pelo valor de x *que pode variar entre* 1 *e* 33, *ou seja, há* 33 *soluções e* $I(\tau) = 33$.
Finalmente, a única solução que fica invariante por qualquer permutação do último tipo é

$$x_i = 25 \ \forall i$$

A aplicação da fórmula geral dá-nos então

$$\frac{1}{|S_4|}\sum_{\pi\in S_4}|I(\pi)| = \frac{1}{24}\left(\binom{99}{3} + 6\times 49^2 + 3\times 49 + 8\times 33 + 6\right) = 7153$$

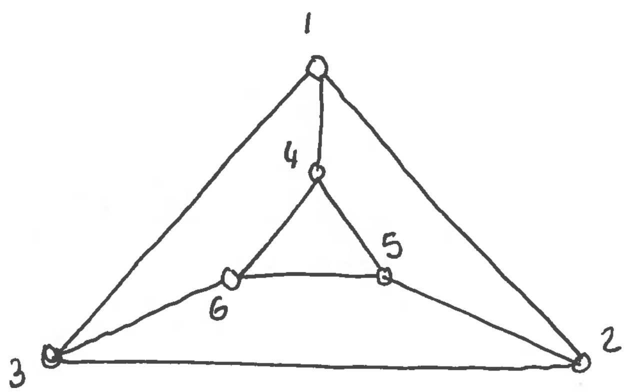
Nota 1.10 *Note-se que este cálculo depende quer do número n de caixas que determina o grupo de permutações, quer do número k de bolas, tornando extremamente complicada a possível expressão que poderíamos obter para $P_n(k)$, válida para todos os $0 < n \leq k$.*
Já é um exercício esclarecedor tentar *generalizar o cálculo acima para qualquer k, mantendo $n = 4$.*
O que torna o cálculo complicado é que $|I(\pi)|$ não é, como nos exemplos anteriores, da forma m^k em que m é um certo número fixo (o número de cores) e k é o número de ciclos de π. O que se passa aqui é que as cores são substituídas neste exemplo pelos possíveis números de bolas em cada caixa, ou seja, pelos possíveis valores dos x_i: assim, se $i, j \in \{1,2,3,4\}$ estão no mesmo ciclo de π, uma solução de

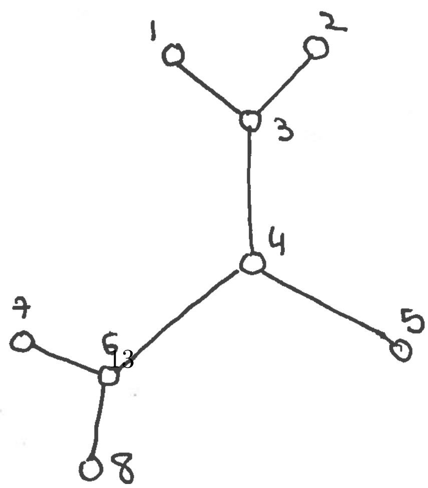
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \qquad 0 \leq x_i \ \forall i$$

só pertence a $I(\pi)$ se $x_i = x_j$.
A dificuldade é que embora os possíveis valores de x_i sejam $\{1, \cdots, 97\}$, eles não são independentes *uns dos outros: a sua soma tem que ser* 100*.*

Exercícios

1. Nas figuras anexas, uma simetria é uma permutação dos vértices que perserva a relaçãde adjacência, ou seja, as ligações entre vértices. Determinar o número de simetrias de cada tipo cíclico, para cada uma das figuras.


1
4
5
6
3
2

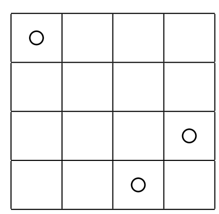

1
2
3
4
7
6
5
8

2. De quantas maneiras podemos colorir as arestas de um cubo, usando m cores?

3. Quantas sequências de letras podemos formar com 2 **M**, 4 **A**, 5 **T** e 6 **O**, se cada sequência e a sua inversa (lida da direita para a esquerda) são consideradas a mesma?
   E de quantas maneiras podemos colocar as mesmas letras nos vértices de um polígono regular com 17 lados, se arranjos obtidos um do outro por uma simetria do polígono são considerados iguais?

4. a) De quantas maneiras podemos pintar, com m cores, um tabuleiro de xadrez?
   b) E se o tabuleiro for transparente?
   c) Considerar os mesmos problemas para um tabuleiro 7×7.

5. Dividimos um cartão quadrado em 16 quadrados iguais e perfuramos 3 desses quadrados no seu centro, como no exemplo da figura:



   Tendo em conta que o cartão é igual dos dois lados, quantos cartões diferentes podemos criar?
   E se perfurarmos 4 (ou 5 ou 6...) quadrados?

6. De quantas maneiras podemos colorir (com uma cor...) quadrados de um tabuleiro $n \times n$ com a condição de em cada linha e cada coluna do tabuleiro ficar exactamente 1 quadrado colorido?
   Se considerarmos que duas dessas colorações são equivalentes se podemos transformar uma na outra por uma simetria do tabuleiro (rotação ou reflexão), quantas classes de equivalência existem?

   Nota: A segunda pergunta deve ser respondida para $n = 5$ e $n = 6$.

7. Quantos cubos diferentes com arestas de comprimento 2 se podem construir usando cubos de arestas de comprimento 1 de 5 cores diferentes? E se forem cubos com arestas de comprimento 3?

8. De quantas maneiras podemos distribuir 100 bolas iguais por 3 caixas quadradas iguais e 3 caixas redondas iguais, se cada caixa pode levar qualquer número de bolas? E se as caixas redondas tiverem capacidade para 20 bolas cada?

9. a) Mostrar, usando o Princípio de Inclusão-Exclusão, que o número de maneiras de colorir os vértices *numerados* de um polígono de n vértices com m cores, com a condição de vértices adjacentes (ou seja, ligados por uma aresta) terem cores diferentes, é igual a

$$(m-1)^n + (-1)^n(m-1)$$

   b) De quantas maneiras podemos colorir os vértices de um polígono regular de n vértices com m cores, com a condição de vértices adjacentes terem cores diferentes?

   Nota: A condição na primeira alínea dos vértices estarem numerados, corresponde a termos um polígono numa posição fixa. Na segunda alínea, temos já que ter em conta o efeito das simetrias do polígono.