1 Colorações de grafos

Definição 1.1 *Uma k-coloração de um grafo G é uma função $f : V \to S$ definida no conjunto dos vértices de G e com imagem num conjunto S com k elementos (o conjunto das cores), com a propriedade de que se u e v são adjacentes então $f(u) \neq f(v)$. Um grafo para o qual existem k-colorações diz-se k-colorável.*

Por definição, um grafo com lacetes não admite colorações. Por outro lado, um grafo sem lacetes é k-colorável se e só se o grafo simples que se obtém identificando todos os conjuntos de arestas paralelas também o for. Assim, no que segue, consideraremos apenas grafos simples.

Definição 1.2 *O número de coloração de G, $\chi(G)$, é o menor k para o qual G é k-colorável.*

Algumas observações elementares sobre o número de coloração:

Um grafo G de ordem n é k-colorável para todo o $k \geq n$, pelo que $\chi(G) \leq n$.

$\chi(G) = \max\{\chi(H) : H \text{componente conexa de } G\}$.

O único (a menos de isomorfismo) grafo de ordem n com número de coloração n é o grafo completo K_n.

$\chi(G) = 1$ se e só se G não tem arestas; $\chi(G) = 2$ se e só se G é **bipartido**, ou seja, se existe uma partição dos vértices de G,

$$V = X \cup Y; \; X \cap Y = \emptyset$$

tal que toda a aresta de G incide num vértice $x \in X$ e noutro vértice $y \in Y$. Em particular, as árvores bem como os ciclos de comprimento par têm número de coloração 2.

Os ciclos de comprimento ímpar têm número de coloração 3.

Provar que $\chi(G) \leq k$ é equivalente a determinar uma partição dos vértices

$$V = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k;\ X_i \cap X_j = \emptyset\, \forall i \neq j$$

em conjuntos **estáveis**, ou seja, tal que para qualquer $i \leq k$ e para quaisquer vértices $u, v \in X_i$, u e v não são adjacentes. Vamos designar uma partição deste tipo uma **partição estável**.

Um caso particularmente simples é o dos grafos com $\chi(G) = 2$, ou seja os grafos cujos vértices são a união disjunta de dois conjuntos estáveis, que como referimos são designados **grafos bipartidos**.
Esses grafos podem ser identificados por uma outra propriedade:

Proposição 1.3 *Um grafo simples é bipartido se e só se não contém ciclos (caminhos fechados) de comprimento ímpar.*

Demonstração 1.4 *Suponhamos que G um grafo bipartido com decomposição $V_G = X \cup Y;\ X \cap Y = \emptyset$ do conjunto de vértices em conjuntos estáveis. Um ciclo é então forçosamente determinado por uma sequência de vértices*

$$x_1, y_1, x_2, \cdots, x_j, y_j$$

onde $x_i \in X$ e $y_i \in Y$, e tem portanto comprimento par $2j$.
Reciprocamente, suponhamos que G não contém ciclos de comprimento ímpar. Notamos que basta provar que cada componente conexa de G é um grafo bipartido, ou seja, basta provar a implicação para grafos conexos. Escolhemos um vértice qualquer x e definimos dois subconjuntos de vértices

$$X = \{v \in V_G : dist(x, v) \equiv 0 \mod 2\}, \qquad Y = \{v \in V_G : dist(x, v) \equiv 1 \mod 2\},$$

onde $dist(\ ,\ )$ designa a distância entre os v'ertices.
É claro que V_G é a união disjunta de X e Y, uma vez que G é conexo. Resta verificar que cada um desses conjuntos é independente, isto é, que quaisquer vértices $u, v \in X$ (respectivamente $u, v \in Y$) são não adjacentes.
Suponhamos que $u, v \in X$ são adjacentes pela aresta a; existe um caminho C_1 de comprimento $2j$ entre x e u e um caminho C_2 de comprimento $2k$ entre v e x; o passeio fechado C_1, a, C_2 tem portanto comprimento ímpar e cada

aresta nele contida é percorrida ou 1 *ou* 2 *vezes; se eliminarmos nesse passeio as arestas percorridas* 2 *vezes, ficamos com uma união de ciclos (alguns dos quais podem ter comprimento* 0*, ou seja, serem vértices isolados) dos quais pelo menos um tem comprimento ímpar.*

1.1 Relação com outros parâmetros

Um minorante óbvio para o número de coloração de um grafo é dado por $\omega(G)$, que é a ordem do maior grafo completo que é subgrafo de G (também designado o maior clique de G).
Por outro lado temos também $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, onde

$$\alpha(G) = max\{|S| : S \subset V \text{é estável}\}.$$

Isso decorre de que nenhum dos conjuntos monocromáticos de vértices X_i pode ter mais do que $\alpha(G)$ elementos; logo,

$$|V| = \sum_{i \leq k} |X_i| \leq \alpha(G)k$$

1.2 Algoritmo ganancioso

Um **algoritmo** simples para colorir um grafo segue a estratégia "gananciosa": Dada uma lista de cores $c_1, c_2, \cdots$ e com os vértices ordenados $v_1, \cdots, v_n$, colorimos cada vértice por ordem usando a primeira cor que ainda não foi usada em nenhum vértice adjacente a ele.

Naturalmente, o resultado depende da ordem dos vértices e embora exista sempre uma ordem que conduz a uma coloração óptima (exercício), é em geral difícil determinar essa ordem antecipadamente.

Exemplo 1.5 *Dado $m > 1$, seja G o grafo bipartido com vértices $V_G = X \cup Y$ onde*

$$X = \{x_1, \cdots, x_m\} \qquad Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$$

e arestas (x_i, y_j) para todos os $1 \leq i, j \leq m$ tais que $i \neq j$.
Se tomarmos os vértices na ordem $x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ o algoritmo ganancioso dá uma coloração com duas cores e de facto $\chi(G) = 2$.
Mas se a ordem for $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ o algoritmo ganacioso produz uma coloração com m cores.

Entretanto, a análise deste algoritmo permite mostrar que

Proposição 1.6 *: Se G é um grafo conexo, simples, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ onde $\Delta(G)$ designa o máximo dos graus dos vértices de G.*

Demonstração 1.7 *De facto, se colorirmos G seguindo a estratégia do algoritmo descrito atrás (para uma ordem qualquer dos vértices) com $\Delta + 1$ cores, quando chegamos a um vértice v, no pior dos casos ele terá Δ vértices adjacentes, todos coloridos com cores diferentes, e mesmo nesse caso ainda temos uma cor disponível.*

Pode-se provar um pouco mais:

Teorema 1.8 *(Brooks): Se G é um grafo conexo que não é um grafo completo nem um ciclo de ordem ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

A aplicação do algoritmo ganancioso mostra que o importante não é tanto o grau do vértice a colorir mas sim o número de vértices adjacentes já coloridos. Essa ideia está na base de um refinamento que podemos introduzir no algoritmo ganancioso, estabelecendo um critério para a ordenação dos vértices, e que permite deduzir uma proposição que pode dar uma melhor majoração para o número de coloração.

Seja n a ordem de G. Fazemos uma ordenação dos vértices de G que passa por considerar uma sucessão de subgrafos induzidos. Designamos $G_0 = G$ e começamos por escolher um vértice v_1 de grau $\delta(G_0)$; no subgrafo $G_1 = G_0 - \{v_1\}$, escolhemos de novo um vértice v_2 de grau $\delta(G_1)$, e assim por diante: em cada passo temos um subgrafo induzido G_k, escolhemos nele um vértice v_{k+1} de grau mínimo e definimos $G_{k+1} = G_k - \{v_{k+1}\}$, até esgotarmos todos os vértices.
Colorimos os vértices de G aplicando o algoritmo ganancioso à ordem inversa

$$v_n, v_{n-1}, \cdots, v_2, v_1;$$

notamos que, nesta ordem, cada vértice v_k é adjacente a no máximo $\delta(G_{k-1})$ vértices *que o precedem na ordem*; se $d = \max\{\delta(G_k) : 0 \leq k < n\}$, podemos colorir G com $d+1$ cores, uma vez que quando vamos colorir o vértice v_k, no pior dos casos existirão d vértices adjacentes já coloridos, e portanto existe decerto uma cor disponível.

A estimativa para $\chi(G)$ assim obtida depende certamente das sucessivas escolhas de vértices de grau mínimo nos subgrafos induzidos. Em qualquer caso, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.9 *: Seja G um grafo simples e defina-se*

$$d = max\{\delta(H) : H \text{ subgrafo induzido de } G\}$$

. Então tem-se $\chi(G) \leq d+1$.

Existem diversas variantes desta ideia que conduzem a outros tantos resultados sobre a majoração de $\chi(G)$. Mas não existe qualquer fórmula simples nem um algoritmo que determine $\chi(G)$ em tempo polinomial.

Exercícios 1

1. Mostrar que um grafo G tem sempre pelo menos $\binom{\chi(G)}{2}$ arestas.
2. Mostrar que é possível ordenar os vértices de um grafo G de modo a que o algoritmo ganancioso de coloração use apenas $\chi(G)$ cores.

3. Seja G um grafo (simples) com vértices V. $S \subset V$ chama-se um <u>conjunto estável</u> se quaisquer dois vértices $u, v \in S$ não são adjacentes. $S \subset V$ chama-se uma <u>cobertura de G</u> se cada aresta de G incide em algum $v \in S$. Definem-se

$$\alpha(G) = max\{|S| : S \subset V \text{é um conjunto estável}\}$$

$$\beta(G) = min\{|S| : S \subset V \text{é uma cobertura de} G\}$$

Mostrar que $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

4. Mostrar que dado um grafo de ordem n

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

onde $\alpha(G)$ designa o número máximo de vértices num conjunto estável.

5. Seja G um grafo com $\chi(G) = k$ e

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$$

uma partição dos vértices em conjuntos estáveis, um para cada cor. Mostrar que para cada $i \leq k$ existe algum $v \in V_i$ que tem vértices adjacentes de todas as outras cores. Em particular, G tem que conter pelo menos k vértices de grau maior ou igual a $k - 1$.
Sugestão: analisar a negação da afirmação contida no enunciado.

6. Mostrar que se G tem sequência de graus $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, então

$$\chi(G) \leq \max\{\min(d_i + 1, i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

7. Dados grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices V, definimos $G \vee H$ como sendo o grafo com vértices V e em que $u, v \in V$ são adjacentes se e só se o são em G ou em H (ou em ambos).

   a) Mostrar que

   $$\chi(G \vee H) \leq \chi(G)\chi(H).$$

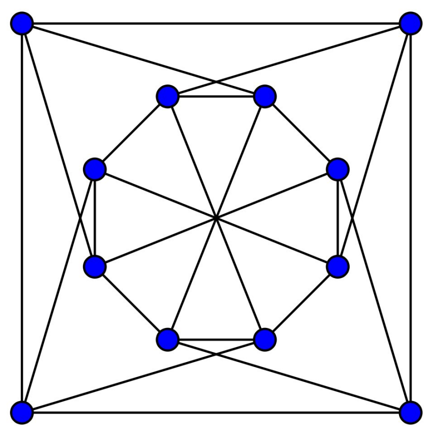
   Concluir que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

b) Mostrar que $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

Sugestão para a segunda desigualdade da alínea b): usar a desigualdade do exercício anterior.

8. Dados inteiros r e t com $2r \leq t$, define-se o grafo de Kneser $Kn(r,t)$ do seguinte modo: os vértices são os subconjuntos de $[t] = \{1, 2, \cdots, t\}$ com r elementos; dois vértices são adjacentes se são disjuntos. Mostrar que $\chi(Kn(r,t)) \leq t - 2r + 2$.
Sugestão: indução.

9. Determinar o número de coloração do grafo de Chvátal representado na figura.



1.3 Coloração de grafos planares.

Um caso especial que merece menção é o dos grafos planares. Um dos problemas mais famosos de coloração de grafos foi o da demonstração de que qualquer mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores. Isso é equivalente à afirmação de que qualquer grafo planar simples é 4-colorável.

Embora as demonstrações existentes até hoje deste resultado dependam fortemente de um grande número de verificações só possíveis com a utilização de computadores, é muito fácil mostrar que um grafo planar simples é 6-colorável:

Uma consequência imediata da fórmula de Euler para grafos planares conexos simples $v - a + f = 2$, é que o grau mínimo $\delta(G)$ de um grafo planar simples é menor ou igual a 5: de facto, como vimos, $a \leq 3v - 6$, e portanto

$$\delta(G)n \leq \sum_{v \in V_G} d(v) = 2a \leq 6v - 12.$$

Como isso continua a ser verdade para qualquer subgrafo, a proposição anterior garante que G pode ser colorido com 6 cores.

Com um pouco mais de trabalho prova-se o seguinte:

Proposição 1.10 *Um grafo planar, sem lacetes, é* 5*-colorável.*

Demonstração 1.11 *Por indução no número de vértices do grafo. O caso* $n = 1$ *(e de facto os casos* $n \leq 5$*) são evidentes. Suponhamos portanto como hipótese de indução que todos os grafos planares sem lacetes, com menos do que* n *vértices são* 5*-coloráveis, e seja* G *um grafo nas mesmas condições, com* n *vértices.*
Sabemos que existe pelo menos um vértice x *com grau menor ou igual a* 5*.*
Usando a hipótese de indução, colorimos com 5 *cores o grafo* $G - \{x\}$*.*
Se $d(x) < 5$ *ou* $d(x) = 5$ *mas os vértices adjacentes a* x *não usam as cinco cores, podemos sempre completar a coloração. Basta portanto considerar o caso em que os vértices adjacentes ao vértice* x *que queremos colorir, estão coloridos com* 5 *cores; sem perda de generalidade, podemos supôr, para simplificar a descrição, que as cores* $1, 2, 3, 4, 5$ *estão a colorir, nesta ordem, os vértices adjacentes a* x *que o rodeiam no sentido dos ponteiros do relógio, numa certa representação planar do grafo.*
Consideramos agora o subgrafo de G *induzido pelos vértices de cor* 1 *ou* 3*; se os vértices* x_1 *e* x_3*, adjacentes a* x *e coloridos, respectivamente, com as*

cores 1 *e* 3*, estão em componentes conexas diferentes deste subgrafo, podemos trocar as cores* 1 *e* 3 *numa dessas componentes, sem violar a regra de não termos vértices adjacentes com a mesma cor; nesse caso, por exemplo o vértice* x_3 *passa a ter a cor* 1 *e a cor* 3 *fica disponível para* x*.*
Caso contrário, concluímos que existe um caminho em G*, com início em* x_1 *e fim em* x_3*, com cores* 1 *e* 3 *alternadas. Na nossa representação plana, esse caminho limita uma união de faces, arestas e vértices de* G*, contendo por exemplo o vértice* x_2*, colorido com a cor* 2*; mas então podemos trocar a cor* 2 *com por exemplo a cor* 4 *nos vértices que ficam no interior daquele caminho, deixando a cor* 2 *disponível para* x*.*

1.4 Polinómio de coloração.

Uma abordagem algo diferente ao problema da coloração de grafos consiste em, dado um grafo G e k cores, procurar determinar quantas colorações diferentes de G com essas cores existem, onde duas colorações são consideradas diferentes se existe pelo menos um vértice que não tem a mesma cor nas duas colorações. Não é obrigatório usar todas as k cores numa coloração.

Designemos esse número por $p(G, k)$. É claro que o menor k para o qual $p(G, k) > 0$ é precisamente $\chi(G)$.
Se G não tem arestas, cada um dos seus n vértices pode ser colorido com qualquer uma das k cores, logo nesse caso $p(G, k) = k^n$; por outro lado se G é um grafo completo, todos os vértices têm que ter uma cor diferente e $p(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1) = n!\binom{k}{n}$.

Existe uma fórmula de recorrência para os números $p(G, k)$; recorde-se que dada uma aresta a de G, $G \setminus a$ é o grafo que se obtém eliminando a em G, e G/a é o grafo que se obtém eliminando a e identificando os vértices incidentes um com o outro. Como se referiu atrás, para o efeito de contar colorações podemos identificar igualmente as arestas paralelas que possam ser criadas. Tem-se então

$$p(G, k) = p(G \setminus a, k) - p(G/a, k)$$

De facto, uma k-coloração de G é igualmente uma k-coloração de $G \setminus a$; por outro lado, uma k-coloração de $G \setminus a$ não induz uma k-coloração de G exactamente se os vértices incidentes a a tiverem a mesma cor, e isso acontece se e só se ela é também uma k-coloração de G/a.

Verifica-se que, para um grafo G fixo, $p(G, k)$ é um polinómio na variável k, o polinómio de coloração de G, que se determina por aplicação da fórmula de recorrência:

Teorema 1.12 : *Dado um grafo sem lacetes G de ordem n, existe um polinómio $p(G, x)$ tal que $p(G, k)$ é o número de colorações de G que se podem fazer usando (algumas das) cores $1, 2, \cdots, k$. Além disso, se G é simples e a é uma aresta de G, então*

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

O polinómio $p(G, x)$ tem grau n, coeficientes inteiros com sinal alternado, termo principal x^n e termo constante nulo.

Demonstração 1.13 *A demonstração é por indução no número m de arestas de G: se $m = 0$ então $p(G, x) = x^n$. Se $m > 0$ e G não for simples definimos $p(G, x) = p(H, x)$ onde H é o grafo simples associado (que tem menos arestas e portanto está definido por hipótese de indução). Suponhamos então que G é simples; escolhida uma aresta a, ambos os grafos $G \setminus a$ e G/a têm $m - 1$ arestas e não têm lacetes. Pela hipótese de indução existem polinómios*

$$p(G \setminus a, x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i x^i, \qquad p(G/a, x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} b_i x^i$$

satisfazendo as hipóteses do teorema.
Definimos

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

que se verifica ter as propriedades do enunciado.

Note-se que a recursão pode ser usada quer na forma

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

para chegar eventualmente a uma combinação linear de polinómios cromáticos de grafos triviais (sem arestas), quer na forma

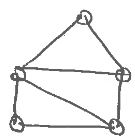
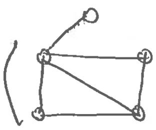
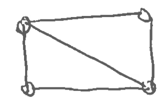
$$p(G \setminus a, x) = p(G, x) + p(G/a, x)$$

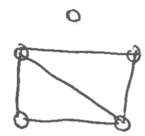
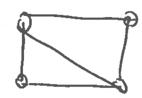
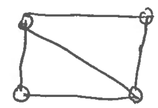
para chegar eventualmente a uma combinação linear de polinómios cromáticos de grafos completos.
Também é útil para a aplicação da recorrência notar que se G tem, por exemplo, componentes conexas G_1 e G_2,

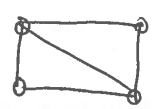
$$p(G, x) = p(G_1, x)p(G_2, x).$$

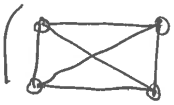
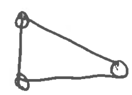
O exemplo seguinte ilustra estas observações

EXEMPLO DE CÁLCULO DE $p(G,x)$

$p\Big($  $,x\Big) = p\Big($  $,x\Big) - p\Big($  $,x\Big)$

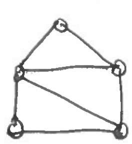
$= p\Big($  $,x\Big) - p\Big($  $,x\Big) - p\Big($  $,x\Big) =$

$= (x-2)\,p\Big($  $,x\Big) =$

$= (x-2)\Big[p\Big($  $,x\Big) + p\Big($  $,x\Big)\Big] =$

$$= (x-2)\left[x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2)\right] =$$

$$= x(x-1)(x-2)^3$$

EM PARTICULAR, $\chi\Big($  $\Big) = 3$

E EXISTEM 6 COLORAÇÕES COM 3 CORES.

Exercícios 2

1. Completar a demonstração das propriedades do polinómio de coloração, mostrando que, se G tem m arestas e k componentes conexas, e

   $$p(G,x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} a_i x^i$$

   é o seu polinómio de coloração, então

   $$a_{n-1} = m; \qquad a_i = 0 \ \forall i < n-k.$$

2. Determinar o polinómio de coloração de uma árvore com n vértices.

3. Determinar o polinómio de coloração do grafo $K_{3,3}$.

4. Seja G um grafo simples e $a \in E_G$ uma **aresta de corte**, ou seja, tal que $G \setminus a$ tem mais uma componente conexa que G: se a incide nos vértices u e v, $G \setminus a$ é a união disjunta de grafos G_1 e G_2, tal que $u \in V_{G_1}$ e $v \in V_{G_2}$. noindent Mostrar que

   $$p(G,x) = \frac{x-1}{x} p(G \setminus a, x).$$

5. Dado um grafo simples G com n vértices, seja $m_G(r)$ o número de partições estáveis de V_G com r conjuntos estáveis. Mostrar que

   $$p(G,x) = \sum_{k=1}^{n} m_G(r) x^{\underline{r}},$$

   onde $x^{\underline{r}} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$.
   Deduzir uma outra demonstração de que $a_{n-1} = m$, o número de arestas de G.

1.5 O Teorema de Turán

Como vimos, um grafo é p-colorável, se existe uma partição do conjunto dos vértices $V = V_1 \cup \cdots \cup V_p$ satisfazendo as condições

$$\forall i \leq p \, V_i \neq \emptyset \text{ é um conjunto estável ;}$$

$$\forall i \neq j, V_i \cap V_j = \emptyset$$

Um grafo (simples) onde exista uma partição deste tipo chama-se p-partido. Obviamente os grafos p-partidos são o exemplo mais simples de grafos que não contêm K_{p+1} como subgrafo.
Vamos agora abordar o problema de outro modo, procurando determinar qual o número máximo de arestas de um grafo p-partido. À semelhança de definições anteriores, um grafo p-partido diz-se completo se para qualquer par de índices $1 \leq i, j \leq p$, se tem

$$i \neq j \implies u \text{ adjacente a } v, \forall u \in V_i,\, v \in V_j$$

ou seja se tiver o maior número possível de arestas.

Seja G um grafo p-partido completo e V_1, V_2 dois dos conjuntos estáveis; suponhamos que $|V_1| = m$ e $|V_2| = m+j$ com $j > 1$; o número de arestas entre estes dois conjuntos de vértices é evidentemente $m(m+j)$; mas se mudarmos um vértice v de V_2 para V_1, eliminando as arestas que uniam v a vértices de V_1 mas criando uma nova aresta entre v e u para cada vértice u que ficou em V_2, verificamos que perdemos m arestas por um lado mas ganhamos $m+j-1$ arestas por outro, ou seja, aumentamos o número total de arestas do grafo, mantendo a propriedade de este ser p-partido.
Concluímos portanto que para obter um grafo de ordem n, p-partido e com o maior número possível de arestas, devemos repartir os vértices em conjuntos tão equilibrados quanto possível; dividindo n por p, se $n = tp + r$, com $0 \leq r < p$, temos $n = t(p-r) + (t+1)r$ e podemos repartir os vértices em $p - r$ conjuntos com t vértices cada e r conjuntos com $t + 1$ vértices cada.

Se estes conjuntos forem estáveis e existirem todas as arestas entre vértices de conjuntos diferentes, obtemos um grafo $T_{p,n}$, chamado grafo de Turán, cujo número de arestas é

$$a(n,p) = \frac{(p-1)n^2 - r(p-r)}{2p}.$$

A dedução desta fórmula para o número de arestas é deixada como exercício. Completamos a definição, pondo $T_{p,n} = K_n$ se $n < p$, caso em que não é possível termos um grafo p-partido de ordem n. Note-se aliás que para $n \leq p$, temos sempre $a(n,p) = \binom{n}{2}$ o que justifica a extensão da definição (que corresponde a partir o conjunto dos vértices em n conjuntos com um vértice e $p-n$ conjuntos com zero vértices).

Nota 1.14 *Note-se que o raciocínio anterior mostrou que $T_{p,n}$ é, a menos de isomorfismo, o único grafo p-partido com n vértices e número máximo de arestas.*

O seguinte teorema, devido a Turán diz-nos que os grafos $T_{p,n}$ são não apenas exemplos de grafos em n vértices que não contêm K_{p+1} como subgrafo, mas constituem constituem os casos extremos de grafos nessas condições:

Teorema 1.15 (Turán) *: Se G é um grafo simples de ordem n que não contém K_{p+1} como subgrafo, então G tem no máximo $a(n,p)$ arestas e este máximo é atingido se e só se G é isomorfo a $T_{p,n}$.*

Demonstração 1.16 *: Fazemos a prova por indução em p. O resultado é trivial para $p = 2$ uma vez que nesse caso G não tem arestas.*
Pomos como hipótese de indução que para qualquer inteiro $j < p$ e qualquer n, um grafo com n vértices e não contendo K_j como subgrafo, tem no áximo $a(n, j-1)$ arestas e este máximo é atingido se e só se G é isomorfo a $T_{j-1,n}$. Seja então G um grafo com n vértices que não contém K_p como subgrafo.

Escolhemos um vértice x de grau máximo Δ e designamos por Y o conjunto dos vértices adjacentes a x e por X o seu complementar (que inclui o próprio x).
Notamos que as arestas de G se podem decompor em arestas de $G[X]$ (o subgrafo induzido por esse conjunto de vértices), arestas de $G[Y]$, e arestas do subgrafo bipartido $G[X, Y]$.
Por um lado, $G[Y]$ não pode conter K_{p-1} como subgrafo (caso contrário teríamos, juntando x e as suas arestas, uma cópia de K_p). Portanto, pela hipótese de indução, o número de arestas de $G[Y]$ é menor ou igual a $a(\Delta, p-2)$ com igualdade se e só $G[Y]$ é isomorfo a $T_{p-2,\Delta}$.
As restantes arestas não podem ser mais do que $(n-\Delta)\Delta$, uma vez que cada um dos $n-\Delta$ vértices de X tem grau menor ou igual a Δ. Além disso, se $u, v \in X$ forem adjacentes, então têm que existir vértices $u', v' \in Y$ (não necessariamente distintos) tais que nem u e u' nem v e v' são adjacentes. O grafo que se obtém de G eliminando a aresta $u\,v$ e criando as arestas $u\,u'$ e $v\,v'$ tem mais uma aresta que G. Portanto o número de arestas incidentes em vértices de X atinge aquele valor máximo exactamente se X for um conjunto estável (ou seja, se $G[X]$ não tiver arestas) e cada um dos seus $n-\Delta$ vértices for adjacente a cada um dos Δ vértices de Y.

Em conclusão, o número de arestas de G é menor ou igual ao do grafo H com os mesmos vértices $X \cup Y$, onde o subgrafo induzido $H[Y]$ é uma cópia de $T_{p-2,\Delta}$, Y é um conjunto estável e x e y são adjacentes, para todos os $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, o número de arestas atinge esse valor máximo se e só se G e H forem isomorfos.
Mas este grafo H é um grafo $(p-1)$-partido com n vértices e portanto, como vimos na discussão que levou à definição dos grafos de Turán, o seu número de arestas satisfaz $|E_H| \leq a(n, p-1) = |E_{T_{p-1,n}}|$ sendo que a igualdade se verifica exactamente se H for isomorfo a $T_{p-1,n}$.
Juntando estas duas conclusões obtemos o resultado que queríamos provar.

O teorema anterior e o método da sua demonstração implicam a seguinte proposição-algoritmo, cuja demonstração se deixa como exercício.:

Proposição 1.17 *Se G é um grafo simples com n vértices e mais do que $a(n, p-1)$ arestas, então G contém um subgrafo isomorfo a K_p que pode ser encontrado do seguinte modo: escolhemos um vértice v_1 de grau máximo; em seguida escolhemos um vértice v_2 de grau máximo no subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices adjacentes a v_1, e assim por diante até ficarmos com um único vértice v_p.*
O conjunto $v_1, v_2, \cdots, v_p$ constitui um clique de ordem p em G.

O Teorema de Turán pode ser usado para demonstrar resultados noutras áreas. Um bom exemplo é o seguinte: se $S \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto de n pontos com diâmetro 1, ou seja,

$$\max\{\|x - y\| : x, y \in S\} = 1$$

então existem no máximo $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pares de pontos $x, y \in S$ para os quais $\|x - y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Esse facto pode ser justificado mostrando, por um argumento geométrico, que não podem existir 4 pontos de S tais que a distância entre quaisquer dois deles seja maior que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Consideramos então o grafo G cujos vértices são os pontos de S e em que x, y são adjacentes se $\|x-y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$; a conclusão anterior implica que G não contém K_4 como subgrafo. Pelo Teorema de Turán, G tem no máximo $a(n, 3) = \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ arestas.
Aquele majorante é de facto óptimo: para todo o $n > 1$ existe um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ de n pontos em que há exactamente $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pares de pontos $x, y \in S$ para os quais $\|x - y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nota 1.18 *Os exemplos mais simples podem levar à convicção de que os parâmetros $\chi(G)$ (número de coloração) e $\omega(G)$ (maior subgrafo completo) têm sempre valores próximos. Isso é falso: de facto, dados quaisquer m e k, existem grafos G com $\chi(G) \geq k$ e em que o comprimento do menor ciclo (a chamada cintura do grafo) é $\geq m$ (e portanto, em particular, $\omega(G) = 2$!).*

O Teorema de Turán exemplifica um ponto de vista central em Teoria de Grafos, a chamada **Teoria Extremal**: um problema típico é o de identificar qual o número máximo de arestas de um grafo G com n vértices que tenha uma determinada propriedade, e determinar os grafos que atingem esse valor máximo. O Teorema de Turán resolve este problema para a propriedade de não conter K_p como subgrafo.