# 1 Funções Geradoras

Muitos problemas de Combinatória Enumerativa têm como solução uma sucessão de valores. Por exemplo, fixando $n$, o problema de saber quantos $k$-subconjuntos tem $[n]$ tem como resposta a sucessão

$$\binom{n}{k};$$

o problema de saber de quantas maneiras podemos distribuir $k$ bolas iguais por $n$ caixas diferentes tem como solução a sucessão

$$\binom{k+n-1}{n-1},$$

e assim por diante.

Uma sucessão $(a_k)$ pode ser representada pela **érie formal**

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k,$$

a que chamamos a **função geradora** da sucessão.

O termo série formal é usado para frisar que esta expressão não deve interpretada como uma função na variável $z$, que está definida apenas para certos valores de $z$ (aqueles para os quais a série converge).
Neste contexto, podemos tomar $z$ apenas como um símbolo indeterminado que satisfaz as propriedades

$$az^m + bz^m = (a+b)z^m, \qquad az^m \times bz^n = abz^{m+n},$$

e a série formal

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

apenas como um "objecto" que permite coleccionar os elementos da sucessão $(a_k)$ numa forma adequada à resolução de problemas, como veremos adiante. Isto não significa, no entanto, que o facto de uma dada série formal representar uma função, para um certo domínio de valores de $z$, não possa ser usado para obter resultados sobre o problema de enumeração associado a essa série. Antes de descrever e analisar mais detalhadamente estas operações vamos dar alguns exemplos:

Recordemos em primeiro lugar a demonstração combinatória do Teorema do Binómio de Newton.

$$\forall n \geq 0 \; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n.$$

Se associarmos cada factor $(1+z)$ no lado direito da igualdade a um dos elementos de um $n$-conjunto (por exemplo, $[n] = \{0, \cdots, n-1\}$) podemos raciocinar do seguinte modo: ao desenvolver o polinómio numa soma de monómios, obtemos uma parcela $z^k$ escolhendo $z$ em $k$ dos factores e 1 nos outros $n-k$; portanto o coeficiente de $z^k$ nesse desenvolvimento é igual ao número de $k$-subconjuntos de $[n]$, que definimos exactamente como sendo $\binom{n}{k}$.

**Exemplo 1.1** *Usamos a mesma ideia para um problema um pouco mais complicado. De quantas maneiras podemos escolher $k$ elementos de um $n-$conjunto se cada elemento pode ser escolhido no máximo duas vezes? Ou seja, quantos $k$-multiconjuntos com elementos em $n$ têm no máximo duas cópias de cada elemento?*

**Exercício** ***1.2*** *Determinar uma fórmula para o problema usando o Princípio de Inclusão-Exclusão.*

*Como alternativa, consideremos a série formal*

$$(1+z+z^2)^n = \sum_{k\geq 0} a_k z^k;$$

*no desenvolvimento do polinómio do lado esquerdo obtemos cópias do monómio $z^k$ como um produto $z^{i_1} \cdots z^{i_n}$ em que*

$$0 \leq i_l \leq 2 \ \forall 1 \leq l \leq n \ \ e \ \sum_{l=1}^{n} i_l = k.$$

*O número de maneiras de conseguir isso, ou seja, o coeficiente $a_k$, é exactamente a resposta ao nosso problema.*

**Exercício *1.3*** *Mostrar que*

$$a_k = \sum_{t=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{n}{k-t} \binom{k-t}{t},$$

*e fazer uma interpretação combinatória simples deste resultado.*

***Sugestão:*** *Começar por usar o Teorema do Binómio e reescrever o duplo somatório que se obtém numa forma adequada.*

**Exercício 1.4** *Repetir o problema anterior para determinar de quantas maneiras podemos escolher $k$ elementos de um $n-$conjunto se cada elemento pode ser escolhido no máximo três vezes.*

**Exercício 1.5** *Reproduzindo a abordagem feita (lembrar exemplo da aula), determinar a função geradora para a sucessão $a_k$ onde $a_k$ é o número de soluções da equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

*onde os $x_i$ são inteiros nã negativos satisfazendo as condições:*

$1 < x_1 < 6$,

$x_2, x_3 < 8$ *e ímpares e*

$0 < x_4 < 7$ *e par.*

### 1.1 Séries formais

Embora nos exemplos apresentados a função geradora seja sempre um polinómio, vimos já que isso nem sempre acontece. Antes de continuar a explorar as aplicações deste conceito vamos descrever brevemente as propriedades do conjunto $\mathbb{R}[[z]]$ das séries formais com coeficientes reais (de facto, vamos estar interessados fundamentalmente em séries de coeficientes inteiros, mas como se verá em alguns exemplos, a obtenção de fórmulas para os coeficientes inteiros de certas séries formais passa pela consideração de séries com coeficientes reais ou até complexos).

**Proposição 1.6** *O conjunto* $\mathbb{R}[[z]]$ *está munido de operações de soma*

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k + \sum_{k\geq 0} b_k z^k = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) z^k,$$

*e de produto ou multiplicação*

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k \times \sum_{k\geq 0} b_k z^k = \sum_{k\geq 0} c_k z^k,$$

*onde*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j,$$

*que satisfazem as propriedades comutativa, associativa e distributiva do produto sobre a soma.*
*Além disso, a série formal com coeficientes todos iguais a zero é elemento neutro para a soma e toda a série formal*

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k$$

*tem inverso para essa operação: a série*

$$\sum_{k\geq 0} (-a_k) z^k.$$

*A série definida por*

$$a_0 = 1,\ a_k = 0\, \forall k > 0,$$

*que identificamos com o número* $1$*, é o elemento neutro para a operação de multiplicação.*

**Nota 1.7** *A definição da multiplicação generaliza a mesma operação entre polinómios, que são aliás casos especiais de séries formais: um polinómio é uma série formal cujos coeficientes são zero excepto para um conjunto finito de índices.*

**Exercício 1.8** *Mostrar que* $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *tem inversa multiplicativa se e só se* $a_0 \neq 0$*. Verificar além disso que se os* $a_k$ *forem inteiros a inversa tem coeficientes inteiros se e só se* $a_0 = \pm 1$*.*

Um exemplo fundamental é o da série formal $\sum_{k\geq 0} z^k$ que tem inversa $1-z$, como se pode verificar usando a fórmula de multiplicação. Faz portanto sentido escrever a igualdade

$$\sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

**Nota 1.9** ***Séries formais e funções****: No estudo das funções reais de variável real esta igualdade é uma igualdade entre funções, válida num determinado domínio da variável* $z$*. No nosso caso, trata-se apenas de uma notação para descrever uma relação entre duas séries formais, á semelhança do que se faz em Aritmética Modular quando se usa* $a^{-1}$ *para representar não o número racional* $\frac{1}{a}$*, mas sim a classe de congruência inversa da de* $a$*, para um certo módulo* $m$*.*
*Estes abusos de linguagem são constantes na teoria das séries formais: usamos a notação* $e^z$ *para representar a série formal* $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} z^k$*, etc.*
*Sublinhamos de novo que o conceito de série formal corresponde a uma notação cómoda para lidar com sucessões. Poder-se-ia aliás definir directamente a soma e produto de sucessões, e esse é o modo de definir rigorosamente série formal; nessa abordagem, o símbolo* $z$ *corresponde à sucessão*

$$(0, 1, 0, 0, \cdots).$$

*Mas a utilização da linguagem das funções não é só um abuso de linguagem para simplificar a notação. O facto de uma certa série formal ter os mesmos coeficientes da série de Taylor de uma função, permite usar propriedades conhecidas desta função para, por exemplo, fazer estimativas sobre a ordem de grandeza desses coeficientes.*
*Ou, mais simplesmente, podemos usar valores dessa função para deduzir igualdades envolvendo os coeficientes da série formal: por exemplo, o Teorema do Binómio tem como consequência que*

$$\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$$

*que tem uma interpretação combinatória evidente. Mas também que*

$$\sum_k \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

*que nos diz que o número de maneiras de escolher dois subconjuntos* $Y \subset X \subset [n]$*é igual ao número de funções* $g : [n] \to [3]$*; depois de conhecermos a igualdade não é difícil encontrar a sua interpretação combinatória: uma função* $g : [n] \to [3]$ *define um subconjunto de* $[n]$ *por* $X = \{x \in [n] : g(x) \leq 2$ *e um subconjunto* $Y \subset X$*,* $Y = \{x \in [n] : g(x) = 1\}$*.*

#### 1.1.1 O Operador de derivação

**Definição 1.10** *Está definido no conjunto* $\mathbb{R}[[z]]$ *das séries formais com coeficientes reais o seguinte operador*

$$D : \mathbb{R}[[z]] \to \mathbb{R}[[z]], \qquad D\left(\sum_{k\geq 0} a_k z^k\right) = \sum_{k\geq 1} k a_k z^{k-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}z^k.$$

A definição deste operador corresponde, no contexto das funções de variável real, à derivação, e tem exactamente as mesmas propriedades algébricas:

**Proposição 1.11** *Sejam $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ e $g(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$ séries formais com coeficientes reais. O operador de derivação tem as seguintes propriedades:*

1. $D(f(z) + g(z)) = D(f(z)) + D(g(z))$;
2. $D(f(z)g(z)) = f(z)D(g(z)) + D(f(z))g(z)$;
3. *se $f(z)$ tem inversa multiplicativa* $\frac{1}{f(z)}$, $D\left(\frac{1}{f(z)}\right) = -\frac{D(f(z))}{f^2(z)}$;
4. *a composição de $D$ $j$ vezes, aplicada a $f(z)$, que se representa por $D^j(f(z))$ é dada por*
$$D^j(f(z)) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+j)!}{k!} a_{k+j} z^k.$$

**Exercício 1.12** *Provar as propriedades da derivação.*

#### 1.1.2 Composição de Séries Formais

Antes de regressarmos ao estudo das aplicações à combinatória enumerativa, vamos referir brevemente uma outra operação entre séries formais, a composição, que se define, mais uma vez, de modo idêntico à mesma operação entre funções. No entanto, como veremos já de seguida, não podemos definir a composição de quaisquer duas séries formais:

Dadas séries formais $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ e $g(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$, a composta $f \circ g(z) = f(g(z))$ só pode ser

$$f \circ g(z) = \sum_{k\geq 0} a_k \left(g(z)\right)^k =$$
$$= a_0 + a_1(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) + a_2(b_0^2 + 2b_0 b_1 z + (2b_0 b_2 + b_1^2)z^2 + \cdots) + \cdots,$$

ou seja, se $f \circ g(z)$ for uma série formal $\sum_{k\geq 0} c_k z^k$, o coeficiente $c_k$, usando a fórmula para o produto de séries formais, é dado por

$$c_k = \sum_{r\geq 0} a_r \left( \sum_{j_1+\cdots+j_r = k} \prod_{i=1}^{r} b_{j_i} \right)$$

que é em geral uma soma com um número *infinito* de parcelas: por exemplo,

$$c_0 = \sum_{r\geq 0} a_r b_0^r, \qquad c_1 = \sum_{r\geq 1} a_r r b_0^{r-1} b_1.$$

Há duas situações em que este problema não ocorre: uma delas é se $f(z)$ for um polinómio, uma vez que então a soma que define $c_k$ é sempre finita; a outra é quando $b_0 = 0$:

**Exercício 1.13** *Mostrar que se* $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *e* $g(z) = \sum_{k\geq 0} b_k z^k$ *satisfaz* $b_0 = 0$, *existe a série formal* $f \circ g(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$ *e que os seus coeficientes são definidos por*

$$c_k = \sum_{r\geq 0} a_r \left( \sum_{j_1+\cdots+j_r=k} \prod_{i=1}^{r} b_{j_i} \right).$$

### 1.2 O exemplo das Funções Geradoras para escolhas com repetição

Até aqui, as séries formais envolvidas nos exemplos foram sempre polinómios. Vamos agora considerar o exemplo fundamental em que isso não acontece. De quantas maneiras podemos distribuir $k$ bolas idênticas por uma caixa? A resposta é evidentemente 1 para qualquer $k$ e portanto a função geradora dessa sucessão é

$$g(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{k\geq 0} z^k;$$

como vimos atrás,

$$g(z) = (1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z}.$$

E de quantas maneiras podemos distribuir $k$ bolas idênticas por $n$ caixas, ou seja, fixando $n$, de quantas maneiras podemos fazer $k$ escolhas num $n$-conjunto, com repetição e sem ordem? Embora já saibamos a resposta, vamos aplicar o método das funções geradoras: o número pedido é o coeficiente de $z^k$ na série formal

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^n$$

uma vez que neste produto se obtém uma parcela $z^k$ por cada escolha de expoentes $x_i$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k.$$

Concluímos portanto que a função geradora para o número de soluções do nosso problema é

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k = (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

A expressão dos coeficientes $a_k$ pode ser obtida directamente do seguinte modo:

**Exercício 1.14** *Mostrar que a derivada de ordem $n-1$ de*

$$g(z) = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

*é*

$$D^{n-1}(g(z)) = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n}.$$

*Concluir que dado um $n$ fixo,*

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} z^k,$$

*confirmando a resposta já conhecida*

$$a_k = \binom{k+n-1}{k}.$$

**Nota 1.15** *Uma outra versão desta igualdade de séries formais é*

$$\sum_{j\geq 0}\binom{j}{n}z^j = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

**Nota 1.16** *Generalizando o Teorema do Binómio deveríamos ter*

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}(-z)^k$$

*e portanto, pela igualdade deduzida anteriormente*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{k+n-1}{k};$$

*Isso faz de facto sentido definindo, para qualquer* $x$

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

*ou seja, definindo* $\binom{x}{k}$ *como sendo o polinómio do lado direito.*
*Obtemos assim, mais geralmente,*

$$(1-z)^x = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{x}{k}z^k.$$

O exemplo seguinte mostra, por um lado, como podemos usar a generalização do caso anterior, e por outro ilustra uma maneira de deduzir em certos casos a expressão explícita dos coeficientes de uma série formal.

**Exercício 1.17** *Mostrar que a função geradora para o número* $a_k$ *de maneiras de distribuir* $k$ *bolas por* $2$ *caixas* $C_1, C_2$*, com a condição de* $C_2$ *ficar com um número ímpar de bolas é*

$$\sum_{k\geq 0}a_k z^k = \frac{z}{(1-z)^2(1+z)},$$

*e usar uma decomposição da forma*

$$\frac{z}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1+z};$$

*para determinar uma expressão explícita para* $a_k$.

Vale a pena saber que a existência das constantes nas decomposições de funções racionais como no exemplo anterior é garantida pelo seguinte

**Teorema 1.18** *Se* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são polinómios (com coeficientes reais ou complexos, por exemplo) tais que o grau de* $p$ *é menor que o de* $q$ *e* $q(x) = q_1(x)q_2(x)$ *onde* $q_1$ *e* $q_2$ *são polinómios sem raizes comuns, então existem polinómios* $p_1$ *e* $p_2$ *de grau menor que* $q_1$ *e* $q_2$*, respectivamente, satisfazendo a seguinte igualdade:*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}.$$

**Exercício 1.19** *Determinar a função geradora* $\sum_k a_k z^k$ *em que* $a_k$ *é o número de soluções de*

$$x_0 + x_1 + x_2 = k, \qquad \forall i\ x_i \geq 0,\ x_i \equiv i \mod 3.$$

*Procurar a expressão analítica o mais simples possível.*

### 1.3 Significado combinatório de produtos de séries formais

**Exercício 1.20** *Justificar a igualdade*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_j \binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

*por um argumento combinatório (bijecção) e também como resultado da igualdade entre funções geradoras*

$$(1+z)^{n+m} = (1+z)^n(1+z)^m.$$

Um exemplo em que se usa a representação de uma função geradora como produto de séries formais e a igualdade

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} z^k :$$

**Exercício 1.21** *Mostrar que o número de maneiras de decompor* $[n]$ *como união disjunta*

$$\{1, \cdots, k\} \cup \{k+1, \cdots, n\}$$

*e depois escolher* $j$ *elementos no primeiro conjunto e* $l$ *no segundo, é dado por*

$$\sum_{k\geq 0} \binom{k}{j} \binom{n-k}{l}$$

*Para chegar a um resultado mais simples, mostrar que o produto das funções geradoras*

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \binom{k}{j} z^k, \;\; g(z) = \sum_{i\geq 0} \binom{i}{l} z^i;$$

*é*

$$f(z)g(z) = \sum_{n\geq 0} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{j} \binom{n-k}{l} \right) z^n$$

*e portanto a resposta à nossa pergunta é o coeficiente de* $z^n$ *nesta série formal.*

*Mostrar que*

$$f(z) = \frac{z^j}{(1-z)^{j+1}}, \qquad g(z) = \frac{z^l}{(1-z)^{l+1}},$$

*e que portanto*

$$f(z)g(z) = \frac{z^{j+l}}{(1-z)^{j+l+2}} = z^{j+l} \sum_{k\geq 0} \binom{k+j+l+1}{j+l+1} z^k.$$

*Deduzir que o coeficiente de $z^n$ nesta série corresponde a escolher $k = n - j - l$ e é*

$$\binom{n+1}{j+l+1}.$$

*Determinar uma bijecção, sugerida por este resultado, entre as soluções do problema original e os $j+l+1$-subconjuntos de $[n+1]$ .*

**Exercício 1.22** *Um problema próximo do anterior é: determinar, para cada $n$, o número de maneiras de decompor $[n]$ como união disjunta*

$$\{1, \cdots, k\} \cup \{k+1, \cdots, n\}$$

*e depois escolher um subconjunto na primeira parte e e um subconjunto na segunda. A diferença é que não fixamos o número de elementos dos subconjuntos.*
*Justificar que a resposta deve ser o coeficiente de $z^n$ na série formal*

$$\sum_k a_k z^k = \frac{1}{(1-2z)^2},$$

*encontrar uma fórmula explícita para $a_k$, e deduzir uma interpretação combinatória para o resultado, ou seja, dar uma prova simples por bijecção.*

**Exercício 1.23** *Com base nos dois exercícios anteriores, justificar a seguinte interpretação combinatória para o produto de funções geradoras:*

**Proposição** ***1.24*** *Se $f(z) = \sum_k a_k z^k$ e $g(z) = \sum_k b_k z^k$ são funções geradoras tais que $a_k$ representa o número de maneiras de fazer uma construção de certo tipo a partir de um $k$-conjunto, e $b_m$ representa o número de maneiras de fazer uma construçãde um certo tipo a partir de um $m$-conjunto, o coeficiente $c_n$ da série*

$$\sum_k c_k z^k = f(z)g(z)$$

*representa o número de maneiras de decompor $\{1, \cdots, n\}$ em dois blocos $\{1, \cdots l\}$ e $\{l+1, \cdots, n\}$ e depois fazer uma contrução do primeiro tipo a partir do primeiro bloco e uma do segundo tipo a partir do segundo bloco.*

### 1.4 Funções Geradoras e Recorrências

O método das funções geradoras é especialmente adequado para determinar fórmulas para os termos de uma sucessão definida por recorrência, como acontece em muitos casos para sucessões com significado combinatório. Ilustramos esse facto com um exemplo básico:

**Exemplo 1.25** *Quantas sequências de* 0 *e* 1 *de comprimento* $n$ *existem sem dois* 1 *seguidos?*
*Chamemos ao conjunto dessas sequências* $C_n$ *e seja* $a_n$ *a sua cardinalidade. Temos*

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3.$$

*Seja* $n > 1$*; uma sequência de* $C_n$ *que termina com um* 0 *é da forma* $s0$ *onde* $s \in C_{n-1}$*, e reciprocamente, dada* $s \in C_{n-1}$ *podemos acrescentar um* 0 *e ficamos com uma sequência pertencente a* $C_n$ *; ou seja, estabelecemos uma bijecção entre* $C_{n-1}$ *e o subconjunto de* $C_n$ *das sequências que terminam em* 0*.*
*Se uma sequência de* $C_n$ *termina em* 1*, tem que terminar em* 01 *e é portanto da forma* $s01$ *em que* $s \in C_{n-2}$*; e reciprocamente a partir de* $s \in C_{n-2}$ *podemos construir a sequência* $s01$ *que pertence a* $C_n$*.*
*As duas bijecções construídas mostram-nos que*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2,$$

*tal como nos números de Fibonacci* $F_n$*. De facto,* $a_n = F_{n+1}$*, se definirmos*

$$F_0 = F_1 = 1, \; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

*Vamos agora deduzir uma fórmula para* $F_n$*, usando funções geradoras. A ideia é obtermos uma expressão conveniente para a série formal*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} F_n z^n = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + \cdots$$

*Multiplicamos a igualdade da fórmula de recorrência por* $z^{n+1}$ *e obtemos*

$$F_{n+1} z^{n+1} = F_n z^{n+1} + F_{n-1} z^{n+1},$$

*que vale para todo o $n \geq 1$. Somamos em ambos os lados para todo o $n \geq 1$ e obtemos a igualdade de séries formais*

$$\sum_{n \geq 1} F_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} F_n z^{n+1} + \sum_{n \geq 1} F_{n-1} z^{n+1}.$$

*Do lado esquerdo temos*

$$F_2 z^2 + F_3 z^3 + \cdots = f(z) - 1 - z,$$

*enquanto que do lado direito temos*

$$(F_1 z^2 + F_2 z^3 + \cdots) + (F_0 z^2 + F_1 z^3 + \cdots) = z(f(z) - 1) + z^2 f(z).$$

*Resolvendo para $f(z)$ obtemos a igualdade de séries formais*

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}.$$

*Para obter uma expressão explícita para os coeficientes de $f(z)$, factorizamos o denominador*

$$1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z), \text{ com } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \ \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2};$$

*pelo método dos coeficientes indeterminados deduzimos que*

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}$$

*onde*

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \ B = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}.$$

*Como*

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n$$

*chegamos a*

$$f(z) = \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n - \frac{\beta}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} \beta^n z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} z^n$$

*e portanto*

$$F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

*Note-se que, como $-1 < \beta < 0$, podemos concluir que $F_n$ é o inteiro mais próximo de $\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$, ou ainda*

$$F_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \\ \left\lfloor \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor + 1 & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

**Exercício 1.26** *Determinar, pelo método das funções geradoras, a solução da recorrência*

$$a_{n+1} = 2a_n + n, \qquad a_0 = 1.$$

Suponhamos que conhecemos o Teorema do Binómio

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k$$

mas não a interpretação combinatória dos coeficientes $\frac{n!}{k!(n-k)!}$; sabemos sim que os inteiros (desconhecidos...) $b(n,k)$ que representam o número de maneiras de escolher $k$ elementos num $n$-conjunto satisfazem as condições

$b(n,k) = 0$ se $k < 0 \vee k > n$; $\qquad b(n,0) = 1$; $\qquad b(n,k) = b(n-1,k) + b(n-1,k-1)$.

**Exercício 1.27** *Definindo a família de funções geradoras*

$$F_n(z) = \sum_k b(n,k) z^k,$$

*deduzir (sem surpresa...) que, para todo o $n > 0$, $F_n(z) = (1+z)F_{n-1}(z)$ e portanto*

$$F_n(z) = (1+z)^n, \qquad b(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Exercício 1.28** *Podemos também definir a família*

$$G_k(z) = \sum_n b(n,k) z^n.$$

*Deduzir a fórmula de recorrência para as funções* $G_k(z)$ *e concluir que*

$$G_k(z) = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}.$$

*Aplicar a fórmula deduzida atrás*

$$D^k\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{k!}{(1-z)^{k+1}}$$

*para obter de novo a expressão de* $b(n,k)$.

**Exercício 1.29** *Neste exercício vamos aplicar a mesma ideia aos números de Stirling de segunda espécie* $S(k,n)$, *ou seja, o número de maneiras de decompor um* $k$*-conjunto em* $n$ *partes não vazias. A definição combinatória implica que*

$$S(k,n) = 0 \text{ se } n \leq 0 \vee n > k, \qquad S(k,n) = S(k-1,n-1) + nS(k-1,n),$$

*e convencionamos que* $S(0,0) = 1$.
*Podemos considerar duas famílias de funções geradoras associadas a esta sequência:*

$$A_k(z) = \sum_n S(k,n) z^n, \qquad B_n(z) = \sum_k S(k,n) z^k.$$

*Usar a recorrência para concluir que*

$$B_n(z) = \frac{z}{1-nz} B_{n-1}(z)$$

*e que portanto*

$$B_n(z) = \frac{z^n}{\prod_{j=1}^n (1-jz)}.$$

*Para resolver esta igualdade numa fórmula explicíta para os $S(k,n)$, escrever*

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1-jz)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{1-jz},$$

*e deduzir o valor de cada $\alpha_r$: multiplicar a igualdade por $1-rz$, substituir $z=1/r$ e no fim multiplicar por $r^{n-1}$.*

*Qual a igualdade que se obtém se aplicarmos a recorrência à família $A_k(z)$?*

### 1.5 Funções Geradoras para Partições

Quantas partições de $k$ existem em que cada parcela é menor ou igual a $n$?
Este problema pode ser formulado de outra maneira:
Quantas soluções em inteiros não negativos existem para

$$x_1 + 2x_2 + \cdots nx_n = k?$$

Em cada solução desta equação, $x_j$ representa o número de parcelas iguais a $j$.

Com esta interpretação torna-se mais fácil deduzir que a função geradora associada é

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)\cdots(1+z^n+z^{2n}+\cdots) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-z^j},$$

ou seja, o número pedido é o coeficiente de $z^k$ nesta série formal.

**Nota 1.30** *Como se viu numa referência anterior a partições de um inteiro, a descrição destas por meio de diagramas de Young permite mostrar que aquele é também o número de partições de $k$ com $n$ ou menos parcelas.*

Por outro lado, o número $p(k)$ de partições de $k$ com qualquer número de parcelas é dado pelo número de soluções em inteiros não negativos de

$$x_1 + 2x_2 + \cdots kx_k = k,$$

em que, mais uma vez, em cada solução $x_j$ representa o número de parcelas iguais a $j$; evidentemente, não pode haver parcelas maiores que $k$.
A função geradora é o produto infinito

$$(1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z^2 + z^4 + \cdots) \cdots (1 + z^n + z^{2n} + \cdots) \cdots =$$
$$= \prod_{j \geq 1} \frac{1}{1 - z^j}.$$

Embora se trate de um produto infinito (de somas infinitas...), para calcular o coeficiente de um certo $z^k$ basta evidentemente considerar o produto dos factores com $j \leq k$, e nestes factores podemos truncar a série de potências ignorando as potên cias maiores que $k$:

**Exemplo 1.31** *Para calcular* $p(8)$, *ou seja o coeficiente de* $z^8$ *em* $\prod_{j\geq 1} \frac{1}{1-z^j}$, *basta determinar o coeficiente em*

$$\prod_{j \leq 8} \left( \sum_{i=0}^{\lfloor 8/j \rfloor} z^{ij} \right);$$

*claro que este polinómio tem grau muito mais elevado, mas o coeficiente de* $z^k$ *só representa o número de partições de* $k$ *para* $k \leq 8$.

Existem muitos resultados sobre partições de inteiros que se deduzem a partir do estudo de Funções Geradoras, envolvendo frequentemente ferramentas da Análise Real, da Combinatória e da Teoria dos Números que vão muito para além do âmbito deste curso. Terminamos esta secção com um exemplo particularmente simples e surpreendente.

Considere-se a série formal

$$G(z) = \prod_{k \geq 1} (1 + z^k) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Observando a primeira expressão, concluímos que $a_n$ representa o número de partições de $n$ em parcelas *distintas*: cada factor $(1+z^k)$ contribui ou não, uma única vez, para o termo $z^n$ no desenvolvimento da série, e portanto o coeficiente deste é o número de maneiras de obter o expoente $n$ como soma de parcelas distintas.
Notamos que

$$\prod_{k\geq 1}(1+z^k) = \prod_{k\geq 1}\frac{1-z^{2k}}{1-z^k} = \prod_{k \text{ ímpar}} \frac{1}{1-z^k},$$

e portanto, representando este último produto como série formal,

$$\prod_{k \text{ ímpar}} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

onde $b_n$ é o número de partições de $n$ em parcelas ímpares.
Concluímos que

**Proposição 1.32** *O número de partições de $n$ em parcelas distintas é igual ao número de partições de $n$ em parcelas ímpares.*

É possível deduzir esta igualdade estabelecendo directamente uma bijecção entre os dois conjuntos de partições, por intermédio, por exemplo, dos seus diagramas de Young, mas não é de modo nenhum evidente como o fazer.

**Exercício 1.33** *Considere-se a série formal $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ que é a inversa multiplicativa da Função Geradora dos números de partição. Temos portanto*

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k = \prod_{n\geq 1}(1-z^n).$$

*Deduzir que $a_k$ é igual ao número de partições de $k$ num número par de parcelas distintas menos o número de partições de $k$ num número ímpar de parcelas distintas.*
*Comprovar o resultado anterior para $k=7$ e $k=8$.*

### 1.6 Cálculo de somas

O método das Funções Geradoras é também particularmente útil para o cálculo de somas do tipo $b(n) = \sum_k a(n,k)$, ou seja, em que as parcelas dependem de uma outra variável. A ideia consiste simplesmente em considerar a função geradora $\sum_{n\geq 0} b(n)z^n$, inverter a ordem dos somatórios e procurar resolver ou simplificar a soma interior (em $n$).
Ilustra-se a aplicação deste método com um exemplo:

**Exemplo 1.34** *Calcular a soma $b(n) = \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k}$: é claro que o domínio da variável $k$ se pode tomar como $0 \leq k \leq n$, mas como vimos atrás não precisamos de o especificar; consideramos a função geradora*

$$\sum_{n\geq 0} b(n)z^n = \sum_{n\geq 0} \left( \sum_k \binom{n+k}{2k} 2^{n-k} \right) z^n = \sum_{k\geq 0} 2^{-k} \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{2k} (2z)^n;$$

*neste ponto notamos que de facto o domínio de $n$, para $k$ fixo, é $n \geq k$; mudando de variável no somatório em $n$, pondo $n-k=j$, ficamos com*

$$\sum_{k\geq 0} 2^{-k}(2z)^k \sum_{j\geq 0} \binom{j+2k}{2k} (2z)^j = \sum_{k\geq 0} z^k \frac{1}{(1-2z)^{2k+1}},$$

*onde a última igualdade decorre da dedução feita noutra secção sobre o exemplo das escolhas com repetição.*
*Podemos agora calcular esta série*

$$\sum_{k\geq 0} z^k \frac{1}{(1-2z)^{2k+1}} = \frac{1}{1-2z} \sum_{k\geq 0} \left( \frac{z}{(1-2z)^2} \right)^k =$$

$$= \frac{1}{1-2z} \frac{1}{1-\frac{z}{(1-2z)^2}} = \frac{1-2z}{(1-2z)^2 - z}.$$

**Nota *1.35*** *Note-se que este cálculo se baseou na aplicação, intuitivamente óbvia se pensarmos em termos de funções, da operação de composição de séries formais: $\dfrac{z}{(1-2z)^2}$ é uma série formal $g(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$ com $c_0 = 0$ e podemos portanto fazer a composição $f(g(z))$, onde $f(z) = \sum_{k\geq 0} z^k$.*

*Voltando ao exemplo, o polinómio no denominador tem raizes* 1 *e* 1/4 *e portanto podemos factorizá-lo como*

$$\frac{1-2z}{(1-z)(1-4z)}$$

*e decompor esta expressão na forma*

$$\frac{1}{3(1-z)}+\frac{2}{3(1-4z)}=\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}z^n+\frac{2}{3}\sum_{n\geq 0}(4z)^n=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1+2^{2n+1}}{3}\right)z^n.$$

*Concluímos assim que*

$$b(n)=\frac{1+2^{2n+1}}{3}$$

**Exercício 1.36** *Determinar o valor de* $a_n=\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}$ *considerando a respectiva função geradora* $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$.

Um último exercício mais desafiante:

**Exercício 1.37** *Considere-se a sucessão* $a_n=\sum_k\binom{n+k}{2k}2^{n-k}$. *Definir a respectiva função geradora* $f(z)=\sum_n a_nz^n$ *e usá-la para descobrir uma fórmula simples para* $a_n$.
*Qual será a interpretação combinatória possível?*
***Sugestão:*** *depois de trocar a ordem dos somatórios, substituir* $j=n-k$ *e aplicar os resultados obtidos no início da secção 1.2 (até exercício 1.14).*

### 1.7 Funções Geradoras Exponenciais

**Exemplo 1.38** *Considere-se o seguinte problema: quantas palavras de* $k$ *letras se podem formar a partir de* 4 ***A***, 3 ***B***, 2 ***C*** *e* 5 ***D****?*
*O coeficiente de* $z^k$ *em*

$$(1+z+z^2+z^3+z^4)(1+z+z^2+z^3)(1+z+z^2)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)$$

não *nos dá o que queremos: esse coeficiente dá-nos o número de diferentes multiconjuntos com* $k$ *letras que podemos formar mas não distingue a ordem em que elas ficam.*

*Mas se fizermos o desenvolvimento de*

$$\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}\right)\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}\right),$$

*o termo correspondente a termos escolhido o expoente $x_1$ no primeiro factor, $x_2$ no segundo, etc, com*

$$x_1+x_2+x_3+x_4=k$$

*terá coeficiente $\frac{1}{x_1!x_2!x_3!x_4!}$, e portanto, se representarmos aquele produto na forma $\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{k!}z^k$, temos que aquela escolha contribui para o coeficiente $a_k$ com*

$$\binom{k}{x_1,x_2,x_3,x_4},$$

*que conta exactamente o número de maneiras de ordenar $x_1$ **A**, $x_2$ **B**, $x_3$ **C** e $x_4$ **D**.*
*Logo o coeficiente de $\frac{z^k}{k!}$, que é a soma de todos os coeficientes multinomiais $\binom{k}{x_1,x_2,x_3,x_4}$, dá-nos o resultado pretendido.*

**Definição 1.39** *Dada uma sucessão $(a_k)$, a sua **função geradora exponencial** da sucessão, é definida por*

$$\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{k!}z^k.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\frac{a_k}{k!}z^k\times\sum_{j\geq 0}\frac{b_j}{j!}z^j &=\\ =\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{a_j}{j!}\frac{b_{k-j}}{(k-j)!}\right)z^k &=\\ =\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a_jb_{k-j}\right)\frac{z^k}{k!}\end{aligned}$$

ou seja, o produto de funções geradoras exponenciais é também uma função geradora exponencial que, no caso de se ter

$$a_k = a^k,\ b_j = b^j,$$

nos dá a conhecida fórmula do produto de exponenciais:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{a^k}{k!} z^k \times \sum_{j\geq 0} \frac{b^j}{j!} z^j = \sum_{k\geq 0} \frac{(a+b)^k}{k!} z^k.$$

### 1.8 O Teorema de Polya

Muitas famílias de números relacionadas com problemas combinatórios dependem de mais do que um parâmetro e pode ser útil associar-lhes funções geradoras com mais do que uma variável. Embora não entremos aqui nesse tema, encerramos esta breve introdução à Teoria das Funções Geradoras com um desenvolvimento sobre o problema de contagem com simetria, no qual se consideram funções de várias variáveis.

Voltando ao problema geral da contagem com simetria - mas continuando a usar o problema de contar colorações como guia - podemos ser mais ambiciosos e querer uma fórmula que nos indique quantos padrões (ou seja, classes de equivalência de colorações) existem em que cada cor $i$ é usada exactamente $t_i$ vezes. É claro que se o conjunto em que fazemos as nossas colorações tem $n$ elementos, e se temos $m$ cores, então $\sum_{i=1}^{m} t_i = n$.

Para conseguir esse objectivo, começamos por melhorar a nossa fórmula

$$\omega = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} |I(\sigma)|$$

usando as observações feitas imediatamente a seguir à dedução do Teorema de Cauchy-Frobenius-Burnside: $|I(\sigma)| = m^k$ onde $m$ é o número de cores e $k$ o número de ciclos de $\sigma$; se $\sigma$ tiver tipo

$$[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$$

tem-se obviamente $k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
Para termos informação sobre o número de vezes que cada cor é usada, temos que reter na fórmula não só o número de ciclos, mas também os seus comprimentos. Para isso, consideramos a função, chamada **indicador de ciclos**,

$$Z(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} z_1^{\alpha_1(\sigma)} z_2^{\alpha_2(\sigma)} \cdots z_n^{\alpha_n(\sigma)}$$

onde $[\alpha_1(\sigma), \alpha_2(\sigma), \cdots, \alpha_n(\sigma)]$ é o tipo cíclico de $\sigma$.
Por exemplo, o indicador de ciclos para as permutações dos vértices do cubo é

$$\frac{1}{24}\left(z_1^8 + 6z_4^2 + 3z_2^4 + 8z_1^2 z_3^2 + 6z_2^4\right).$$

Como se verifica a partir da definição, obtemos o número de órbitas substituindo $z_i$ por $m$ para todo o $i$:

$$\omega = Z(m, \cdots, m).$$

Associemos agora a cada cor $i$ uma variável $x_i$. Considere-se, no exemplo anterior, a parcela correspondente a uma das permutações: por exemplo, uma das 8 rotações em torno de um eixo que liga dois vértices opostos, contribui com a parcela $z_1^2 z_3^2$ para o indicador de ciclos; naturalmente, podemos colorir cada um dos ciclos com qualquer uma das $m$ cores; quantos vértices de cada cor obtemos? Se nesse monómio substituirmos $z_1$ por $x_1 + \cdots + x_m$ e $z_3$ por $x_1^3 + \cdots + x_m^3$ e desenvolvermos, obtemos

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 (x_1^3 + \cdots + x_m^3)^2 = \sum_t a_t x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}$$

onde a soma se faz sobre todas as $m$-tuplas $t = (t_1, \cdots, t_m)$ de inteiros não negativos que satisfazem $t_1 + \cdots + t_m = 8$.
Por um raciocínio inteiramente análogo ao feito na introdução ao método das funções geradoras, o coeficiente $a_t$ é a resposta á nossa pergunta. De facto, o que fizémos agora foi deduzir a função geradora para a nossa contagem, que neste caso é uma função de $m$ variáveis.

Generalizando, se substituirmos no indicador de ciclos $Z(z_1, \cdots, z_n)$ cada $z_i$ por $x_1^i + \cdots + x_m^i$, obtemos uma nova função, o **inventário de padrões**

$$\omega(x_1, \cdots, x_m) = Z(\sum_i x_i, \sum_i x_i^2, \cdots, \sum_i x_i^n)$$

cujo desenvolvimento

$$\omega(x_1, \cdots, x_m) = \sum_t a_t x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}$$

- onde a soma se faz sobre todas as $m$-tuplas $t = (t_1, \cdots, t_m)$ de inteiros não negativos que satisfazem $t_1 + \cdots + t_m = n$ - nos dá a informação completa sobre os padrões: $a_t$ é o número de padrões em que cada cor $i$ foi usada exactamente $t_i$ vezes.

**Exercício 1.40** *De quantas maneiras podemos colorir as arestas de um cubo com três cores, na condição de cada cor ser usada o mesmo número de vezes?*