1 Conjuntos finitos

O que é afinal um conjunto finito? A ideia intuitiva de podermos contar os elementos de um conjunto leva à

Definição 1.1 *Um conjunto* X *é finito se existe um número natural* m *e uma bijecção* $\phi : X \to [m]$.

Ou seja, os números naturais dão-nos conjuntos padrão que servem para comparar o "tamanho" de outros conjuntos. Em termos mais formais, que tentaremos esclarecer um pouco melhor mais à frente, os números naturais são **cardinais** (finitos).

Para que a definição faça sentido, é necessário que o m determinado por um conjunto X esteja bem definido, ou seja, temos que mostrar que dados naturais $m < n$, não existe uma bijecção

$$\phi : [m] \to [n].$$

Exercício 1.2 *Provar a afirmação anterior.*

Proposição 1.3 *Se* X *é finito, uma função* $f : X :\to X$ *é injectiva se e só se é sobrejectiva.*

Exercício 1.4 *Demonstrar a proposição: começar por justificar que basta considerar* $X = [n]$.

Exercício 1.5 *Mostrar que se* $f : X \to Y$ *é injectiva e* Y *é finito, então* X *também é finito.*

Exercício 1.6 *Justificar que se* $t \in \mathbb{N}$ *e* $X_1, \cdots, X_t$ *são conjuntos finitos, então*

a) a união $X = X_1 \cup \cdots \cup X_t$ *é um conjunto finito;*

b) o produto cartesiano $X_1 \times \cdots, \times X_t$ *é um conjunto finito.*

2 ... e infinitos

Definição 2.1 *Um conjunto é infinito se não é finito.*

Exercício 2.2 *Dar um exemplo de um conjunto X infinito e de uma função $f : X \to X$ injectiva mas não sobrejectiva, e de uma função $f : X \to X$ sobrejectiva mas não injectiva.*

Teorema 2.3 *Se X é infinito, existe uma função $f : X \to X$ injectiva e não sobrejectiva.*

Exercício 2.4 *Tentar demonstrar o teorema. Analisar cuidadosamente que condições ou hipóteses são usadas.*

À semelhança do que definimos para conjuntos finitos temos

Definição 2.5 *Dois conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade, e usamos a notação $X \sim Y$, se existe uma bijecção $f : X \to Y$.*
Se X e Y não têm a mesma cardinalidade e existe uma função injectiva $f : X \to Y$, dizemos que a cardinalidade de X é menor do que a de Y e usamos a notação $X \prec Y$.

Definição 2.6 *Se $X \sim \mathbb{N}$, X diz-se numerável.*

Exercício 2.7 *Mostrar que se X_i é um conjunto numerável, para todo o $i \in \mathbb{N}$, então a união $\bigcup_i X_i$ também é numerável.*

Exercício 2.8 *Mostrar que a função*

$$h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad h(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

é uma bijecção.
Deduzir que, para qualquer natural $t > 0$ o produto cartesiano de t cópias de $\mathbb{N}$é numerável.

Mas o produto cartesiano de uma família numerável de conjuntos finitos X_i, com $|X_i| > 1$, não é numerável: o exercício seguinte ilustra a utilização de uma ideia importante, o argumento diagonal:

Exercício 2.9 *a) Mostrar que existe uma bijecção entre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ dos subconjuntos de X e o conjunto $\{f : X \to \{0,1\}\}$ das funções com domínio X e contradomínio $[2] = \{0,1\}$.*

Em particular, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ pode ser identificado com o conjunto das sucessções x_n, de 0 e 1: o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é identificado com a sucessão x_n que satisfaz

$$x_n = \begin{cases} 1 & se\ n \in A \\ 0 & se\ n \notin A \end{cases}$$

b) Mostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é numerável: seja $A_0, A_1, \cdots$, uma família numerável qualquer de subconjuntos de $\mathbb{N}$, cada um deles representado por uma sucessão $(x(i))_n$, como na alínea anterior; considere-se a sucessão y_n definida por

$$y_n = 1 - (x(n))_n$$

e o subconjunto de $\mathbb{N}$ associado a esta sucessão.

Evidentemente, $\sim$ determina uma relação de equivalência entre conjuntos. O seguinte teorema mostra que $\prec$ define uma relação de ordem entre classes de equivalência de conjuntos (para a relação de equivalência $\sim$) e é além disso uma grande ajuda na demonstração de que conjuntos têm a mesma cardinalidade.

Teorema 2.10 (Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein) *Para quaisquer conjuntos A e B,*

$$(A \prec B \wedge B \prec A) \implies A \sim B,$$

ou seja, se existem funções injectivas

$$f : A \to B, \qquad g : B \to A,$$

então existe uma bijecção $h : A \to B$.

Exercício 2.11 *Demonstrar o teorema, seguindo os passos seguintes:*

a) *Justificar que basta considerar o caso em que $B \subset A$ e g é a inclusão;*

b) *Definem-se recursivamente conjuntos $C_i \subset A$ do seguinte modo:*

$$\begin{cases} C_0 = A \setminus B \\ C_{n+1} = f(C_n) \, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e $h : A \to B$ por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \bigcup_{n \geq 0} C_n \\ x & \text{no caso contrário} \end{cases}$$

c) *Provar que se $x, y \in A$ e $x \neq y$ então $h(x) \neq h(y)$ (h é injectiva) separando os diferentes casos: $x, y \in \bigcup_{n \geq 0} C_n$; $x, y \in A \setminus (\bigcup_{n \geq 0} C_n)$; $x \in \bigcup_{n \geq 0} C_n$ e $y \in A \setminus (\bigcup_{n \geq 0} C_n)$;*

d) *Provar que h é sobrejectiva.*

Exercício 2.12 *Porque é que este teorema é necessário para que $\prec$ defina uma relação de ordem entre classes de equivalência de conjuntos?*

O exercício seguinte mostra que de facto existem infinitas cardinalidades infinitas:

Exercício 2.13 *Dado um conjunto X mostrar que*

b) *não existe uma função $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ sobrejectiva.*
***Sugestão**: dada uma função qualquer $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$, considerar o conjunto $Y = \{x \in X | x \notin \phi(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.*
Supondo que este conjunto pertence à imagem de ϕ, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $\phi(x_0) = Y$, será que $x_0 \in Y$?

Exercício 2.14 *Usar o teorema de Cantor-Schröder-Bernstein para demonstrar que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.*