1 Partições de um número

Designamos por $p_n(k)$ o número de maneiras de distribuir k bolas iguais por n caixas, também iguais entre si, sem deixar qualquer caixa vazia.

Uma vez que não há distinção entre bolas nem entre caixas, cada distribuição sobrejectiva é totalmente caracterizada pelos números de bolas das diversa caixas, não interessando a ordem destas. Portanto, $p_n(k)$ é o número de partições não ordenadas de k em parcelas positivas. E como, exactamente porque não nos interessa a ordem, podemos representá-las sempre em ordem não decrescente, $p_n(k)$ é o número de soluções em inteiros do seguinte sistema de uma equação e n inequações

$$x_1 + \cdots + x_n = k \qquad 0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n.$$

Definimos igualmente $p(k) = \sum_{n=1}^{k} p_n(k)$.

Exercício 1.1 *Calcular $p_5(10)$ e $p(7)$.*

Apesar da equação

$$x_1 + \cdots x_n = k, \qquad x_i > 0$$

ter sido resolvida no caso geral de forma muito simples, não existe para $p_n(k)$ uma fórmula com grau de simplicidade sequer comparável.
Alguns factos de verificação imediata a partir da definição:

Lema 1.2 *1. se $k < n$ então $p_n(k) = 0$ (aplicando o princípio do Pombal);*

2. $p_1(k) = 1$ para todo o $k > 0$;

3. $p_k(k) = p_{k-1}(k) = 1$ para todo o $k > 0$.

Exercício 1.3 *a) Demonstrar o Lema.*

b) Deduzir uma fórmula para $p_2(k)$.

Temos a seguinte fórmula de recorrência:

Proposição 1.4 *: Pondo, por definição, $p_n(k) = 0$ para $k \leq 0$ ou $n \leq 0$, verifica-se a seguinte igualdade, para todo o k e todo o n:*

$$p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + p_n(k-n).$$

Exercício 1.5 *Demonstrar a proposição dividindo as partições de k em n parcelas em dois conjuntos: o das partições em que a primeira parcela é 1 e o das em que não é.*

Um instrumento útil para o estudo de partições de k é o dos **quadros de Young** (também designados, neste contexto, **diagramas de Ferrers**).
Um quadro de Young é uma tabela de linhas alinhadas à esquerda, com cada linha dividida em quadrados, e com a propriedade de que o número de quadrados por linha é não crescente, contados da primeira para a última.
É evidente que a cada partição de k corresponde um quadro de Young com um total de k quadrados, e vice-versa; e os quadros com k quadrados distribuídos por n linhas correspondem às partições de k em n parcelas. Esta identificação permite deduzir facilmente algumas propriedades:

Proposição 1.6 *: $p_n(k)$ é igual ao número de partições de k em que a maior parcela é n.*

Exercício 1.7 *Demonstrar a proposição usando o facto de que a reflexão de um quadro de Young (trocar linhas por colunas) é de novo um quadro de Young.*

Definição 1.8 *Duas partições de k cujos quadros de Young se obtêm por reflexão um do outro, dizem-se* ***conjugadas****.*

Uma outra igualdade (de entre muitas) entre números de partição :

Proposição 1.9 *O número de partições de k em que todas as parcelas são distintas é igual ao número de partições de k em que todas as parcelas são ímpares.*

Exercício 1.10 *Demonstrar a proposição seguindo o raciocínio de Euler: dada uma partição em parcelas distintas, escrevemos cada parcela na forma* $2^a b$ *com* $b = 2t - 1$ *ímpar; agrupando as parcelas em função de* t *temos*

$$k = \sum_{t \geq 1} (2t - 1) m_t$$

com cada m_t *igual à soma de potências de* 2 *todas diferentes (e, naturalmente,* $m_t = 0$ *a partir de uma certa ordem).*
Considere-se a partição de k *com* m_t *cópias de* $2t - 1$*, para cada* t*. Mostrar que esta correspondência é uma bijecção.*

Exercício 1.11 *Mostrar que o número de partições autoconjugadas (ou seja, cujo quadro é simétrico em relação á diagonal) é igual ao das partições que são simultaneamente de parcelas distintas e ímpares.*
Sugestão : *Dado o quadro de Young de uma partição em parcelas distintas e ímpares, construir um quadro simétrico do seguinte modo: "dobrar" cada linha num "L" com base igual à altura e encaixar estes "L" por ordem decrescente.*

Exercício 1.12 *Designando por* $e(k)$*,* $o(k)$ *e* $sc(k)$ *respectivamente as partições de* k *com um número par de parcelas pares, um número ímpar de parcelas pares e autoconjungadas, mostrar que*

$$e(k) - o(k) = sc(k).$$

1.1 Funções Geradoras para Partições

Quantas partições de k existem em que cada parcela é menor ou igual a n?
Este problema pode ser formulado de outra maneira:
Quantas soluções em inteiros não negativos existem para

$$x_1 + 2x_2 + \cdots n x_n = k?$$

Em cada solução desta equação, x_j representa o número de parcelas iguais a j.

Com esta interpretação torna-se mais fácil deduzir que a função geradora associada é

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)\cdots(1+z^n+z^{2n}+\cdots)=$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-z^j},$$

ou seja, o número pedido é o coeficiente de z^k nesta série formal.

Nota 1.13 *Como se viu numa referência anterior a partições de um inteiro, a descrição destas por meio de diagramas de Young permite mostrar que aquele é também o número de partições de k com n ou menos parcelas.*

Por outro lado, o número $p(k)$ de partições de k com qualquer número de parcelas é dado pelo número de soluções em inteiros não negativos de

$$x_1+2x_2+\cdots kx_k=k,$$

em que, mais uma vez, em cada solução x_j representa o número de parcelas iguais a j; evidentemente, não pode haver parcelas maiores que k.
A função geradora é o produto infinito

$$(1+z+z^2+\cdots)(1+z^2+z^4+\cdots)\cdots(1+z^n+z^{2n}+\cdots)\cdots=$$
$$=\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-z^j}.$$

Embora se trate de um produto infinito (de somas infinitas...), para calcular o coeficiente de um certo z^k basta evidentemente considerar o produto dos factores com $j\leq k$, e nestes factores podemos truncar a série de potências ignorando as potên cias maiores que k:

Exemplo 1.14 *Para calcular $p(8)$, ou seja o coeficiente de z^8 em $\prod_{j\geq 1}\frac{1}{1-z^j}$, basta determinar o coeficiente em*

$$\prod_{j\leq 8}\left(\sum_{i=0}^{\lfloor 8/j\rfloor} z^{ij}\right);$$

claro que este polinómio tem grau muito mais elevado, mas o coeficiente de z^k só representa o número de partições de k para $k \leq 8$.

Existem muitos resultados sobre partições de inteiros que se deduzem a partir do estudo de Funções Geradoras, envolvendo frequentemente ferramentas da Análise Real, da Combinatória e da Teoria dos Números que vão muito para além do âmbito deste curso. Terminamos esta secção com um exemplo particularmente simples e surpreendente.

Considere-se a série formal

$$G(z) = \prod_{k\geq 1}(1+z^k) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

Observando a primeira expressão, concluímos que a_n representa o número de partições de n em parcelas *distintas*: cada factor $(1+z^k)$ contribui ou não, uma única vez, para o termo z^n no desenvolvimento da série, e portanto o coeficiente deste é o número de maneiras de obter o expoente n como soma de parcelas distintas.
Notamos que

$$\prod_{k\geq 1}(1+z^k) = \prod_{k\geq 1}\frac{1-z^{2k}}{1-z^k} = \prod_{k \text{ ímpar}}\frac{1}{1-z^k},$$

e portanto, representando este último produto como série formal,

$$\prod_{k \text{ ímpar}}\frac{1}{1-z^k} = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

onde b_n é o número de partições de n em parcelas ímpares.
Concluímos que

Proposição 1.15 *O número de partições de n em parcelas distintas é igual ao número de partições de n em parcelas ímpares.*

É possível deduzir esta igualdade estabelecendo directamente uma bijecção entre os dois conjuntos de partições, por intermédio, por exemplo, dos seus diagramas de Young, mas não é de modo nenhum evidente como o fazer.

Exercício 1.16 *Considere-se a série formal* $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ *que é a inversa multiplicativa da Função Geradora dos números de partição. Temos portanto*

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k = \prod_{n\geq 1}(1 - z^n).$$

Deduzir que a_k *é igual ao número de partições de* k *num número par de parcelas distintas menos o número de partições de* k *num número ímpar de parcelas distintas.*
Comprovar o resultado anterior para $k = 7$ *e* $k = 8$.

Exercício 1.17 *Mostrar que o número de partições de* n *em que cada parte par ocorre no máximo uma vez é igual ao número de partições de* n *em que cada parte ocorre no máximo três vezes.*

Exercício 1.18 *Mostrar que o número de partições de* n *em que cada parte é congruente com* 1 *ou com* 5 *módulo* 6 *é igual ao número de partições de* n *em partes distintas, em que nenhuma delas é congruente com* 0 *módulo* 3.