

# Combinatória e Grafos

## Trabalho de casa

1. De quantas maneiras podemos reordenar os inteiros  $1 \leq x \leq 30$  de modo a que nenhum número primo fique na sua posição original?
2. Quantas sequências de comprimento  $n$  formadas por vogais contêm pelo menos um bloco **AU**?
3. De quantas maneiras podemos ordenar o conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$  de modo a obter pelo menos uma das sequências

1, 2, 3      3, 4, 5      4, 5, 6?

4. Quantas sequências formadas por 10 **A**, 10 **C**, 10 **L** e 10 **M** não contêm a palavra **LMAC**?
5. De quantas maneiras podemos sentar  $n$  casais numa mesa redonda de modo a que os homens e as mulheres fiquem intercalados mas nenhum casal fique lado a lado?
6. Quantas matrizes  $n \times n$  com entradas 0 e 1 têm menos de cinco 1 em cada linha mas não têm colunas nulas?
7. Uma árvore  $T$  com 18 vértices só tem vértices de grau 1, 3 ou 4. Quais as possíveis sequências de graus de  $T$ ?
8. Determinar uma fórmula para o número de árvores com vértices  $v_1, \dots, v_n$  que só têm vértices de grau 1 e 4.
9. Dados  $1 < k < n$  fixos, calcular o número de árvores com vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tais que:
  - a)  $\{v_1, \dots, v_k\}$  está contido no conjunto das folhas;
  - b)  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é o conjunto das folhas.
10. Seja  $a$  uma aresta de  $K_n$ . Mostrar que  $K_n - a$  tem  $(n-2)n^{n-3}$  árvores geradoras.

11. Mostrar que as seguintes condições são equivalentes:

- 1)  $G$  é uma árvore;
- 2) para cada par de vértices  $u, v$  de  $G$  existe um único caminho em  $G$  de  $u$  para  $v$ .
- 3)  $G$  não tem ciclos mas se acrescentarmos uma aresta  $a$ ,  $G$  tem exactamente um ciclo.

12. O grafo  $K_{m,n}$  é definido por ter vértices

$$U \cup V, \quad |U| = m, |V| = n \quad U \cap V = \emptyset$$

com  $u$  e  $v$  adjacentes, para todos os  $u \in U$  e  $v \in V$ , e sendo essas as únicas arestas.

- a) Calcular o número de árvores geradoras do grafo  $K_{3,3}$  pelo seguinte método: começar por determinar as possíveis sequências de graus dessas árvores e, para cada uma dessas sequências calcular o número de árvores geradoras com essa sequência de graus.
- b) Calcular o número de árvores geradoras de  $K_{m,n}$  contando as ramificações em  $V \cup U$  com raiz em  $U$  (ver exercício 10. em **Exercícios 2** das Notas sobre árvores).