Combinatória e Grafos

1. Sabendo que existem 10 primos menores que 30, quantos subconjuntos com 7 elementos de $\{1, 2, \cdots, 30\}$

   a) contêm exactamente três números primos?

   b) E quantos contêm números pares e ímpares?

2. Num totoloto em que são sorteados 6 números de $\{1, 2, \cdots, 50\}$, qual a probabilidade de sairem 3 números pares e 3 ímpares? Fazendo uma aposta com 7 números, qual a probabilidade de acertar em pelo menos 3?

3. Dado N, quantos divisores tem, em média, um natural $1 \leq n \leq N$?
   Sugestão: Contar de duas maneiras as entradas não nulas de uma tabela $N \times N$ em que a entrada (i, j) é 1 se $i \mid j$ e 0 caso contrário.

4. Mostrar que

   a) se $m, n \in \mathbb{N}$ são primos entre si, então m divide o coeficiente binomial $\binom{m}{n}$.

   Sugestão: verificar primeiro que $\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$.

   b) $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

   c) se p é primo então $p \mid \binom{p}{k}$ $\forall k \in \{1, \cdots p - 1\}$.

5. Dados inteiros positivos $m < n$, mostrar que se verifica

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

   Sugestão: Interpretando o lado direito como o número de maneiras de escolher $m + 1$ inteiros no conjunto $\{1, 2, \cdots, n + 1\}$, podemos separar essas escolhas em função do maior inteiro escolhido.

6. Demonstrar a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

7. Quantos caminhos existem com início no ponto $(0,0)$ e fim no ponto $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se em cada passo vamos de (u,v) para $(u+1,v)$ ou para $(u,v+1)$?

8. Demonstrar a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{k} = \binom{m+n}{n}$$

   Sugestão: podemos classificar os caminhos do problema anterior em função do ponto de chegada à recta $x = m$.

9. Determinar em função de k, m e n quantas sequências constituídas por m **A** e n **B** têm exactamente k blocos de **A**.

10. Quantas soluções em inteiros da igualdade

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{16} \leq 13$$

    a) satisfazem a condição $x_i \geq -5$, para todo o i?

    b) satisfazem a condição $0 \leq x_i$ para todo o i e existe pelo menos um i primo tal que $x_i = 0$?

11. De quantas maneiras podemos ordenar sete **A**, doze **B** e dezoito **C**

    a) sem nenhuma restrição ?

    b) com a condição de não haver dois **A** seguidos?

    c) com a condição de nunca ocorrer a sequência **A B**?

12. De quantas maneiras podemos sentar o Alberto, o Xavier e mais dez amigos à volta de duas mesas redondas com seis lugares cada

    a) com a condição de o Alberto não ficar na mesma mesa que o Xavier?

    b) com a condição de o Alberto e o Xavier ficarem na mesma mesa mas não ao lado um do outro?

13. Dado o conjunto $V = \{v_1, \cdots, v_{20}\}$,

    a) quantos grafos simples com conjunto de vértices V existem?
    b) quantos desses grafos têm exactamente 55 arestas?
    c) qunatos desses grafos são grafos bipartidos $G[X, Y]$ em que a partição dos vértices satisfaz

$$|X| = |Y| = 10?$$

14. Justificar que

$$[6, 6, 6, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3]$$

    éa sequência de graus de um grafo simples.

15. Quantos grafos com vértices $v_1, \cdots, v_8$ são

    a) regulares de grau 6?
    b) regulares de grau 5?

16. Mostrar que dado um grafo simples G, podemos decompor o conjunto V_G dos seus vértices numa união disjunta $X \cup Y$ de modo a que pelo menos metade das arestas de G ligam um vértice de X a um vértice de Y.