Combinatória e Grafos

Alguns exercícios para revisão

textbf1 - De quantas maneiras podemos sentar 6 homens e 6 mulheres em 3 mesas redondas com 4 lugares cada, na condição de ficarem 2 homens e 2 mulheres em cada mesa?

2 - De quantas maneiras podemos dividir 45 pessoas em 9 equipas de 5 pessoas cada e escolher um porta-voz em cada equipa?

3 - Temos 9 bolas idênticas de cada uma de 3 cores. Quantos conjuntos de 10 bolas podemos criar?

4 - Qual o número de resultados possíveis quando se lançam três dados iguais simultâneamente?

5 - Determinar uma fórmula para o número de maneiras de alinhar 40 bolas brancas e 40 bolas pretas, de modo a que não haja mais do 3 bolas brancas seguidas.

6 - Em quantas permutações σ de $\{1, 2 \cdots, n\}$ é que $\sigma^3(1) = 1$?

textbf7 - a) Quantos números $1 \leq n \leq 300$ são divisíveis por 3 mas ou não são divisíveis por 5 ou não são divisíveis por 7?

b) Quantos números $1 \leq n \leq 300$ são divisíveis por 3 mas não são divisíveis nem por 5 nem por 7?

8 - - De quantas maneiras podemos sentar 21 pessoas, incluindo o João e a Inês, numa mesa redonda de modo a que o João e a Inês não fiquem lado a lado?

9 - - Quantas soluções em inteiros não negativos existem para a equação

$$x + y + z + w = 7?$$

10 - - Quantos caminhos de comprimento mínimo, constituídos por segmentos de comprimento 1 paralelos aos eixos, partem da origem $(0, 0)$ e terminam no ponto $(10, 6)$?

11 - Determinar uma fórmula para o número de permutações σ de $\{1, 2 \cdots, n\}$ que têm um ciclo de comprimento 2.

12 - - Quantas palavras de 10 letras não contêm todas as vogais?

13 - Quantos cubos diferentes com arestas de comprimento 2 se podem construir usando cubos de arestas de comprimento 1 de 5 cores diferentes? E se forem cubos com arestas de comprimento 3?

14 - Verificar se cada uma das listas seguintes pode representar os graus dos vértices de um grafo (simples) e no caso afirmativo, representar graficamente um grafo nessas condições:

a) $\{3, 3, 2, 2, 2, 1\}$

b) $\{6, 6, 6, 4, 4, 2, 2\}$

c) $\{6, 6, 6, 6, 5, 4, 2, 1\}$

d) $\{6, 6, 6, 4, 4, 3, 3\}$

15 - O complemento de um grafo simples G, é o grafo $\overline{G}$ que tem os mesmos vértices de G mas em que dois vértices são adjacentes se e só se o não forem em G.

a) Se G tem n vértices com graus $d_1, d_2, \cdots, d_n$ quais são os graus dos vértices de $\overline{G}$?

b) Mostrar que se G é desconexo, então $\overline{G}$ é conexo. A recíproca é verdadeira?

16 - Um grafo é regular de grau k se todos os vértices têm grau k. Quantos grafos de ordem 7 e regulares de grau 4, não isomorfos, é que existem? Sugestão: considerar o complemento do grafo.

17 - Seja G um grafo com 10 vértices e 28 arestas. Justificar que G contém um ciclo de comprimento 4.
Sugestão: começar por mostrar que há dois vértices u e v tais que

$$d(u) + d(v) \geq 12.$$

18 - Dado um grafo conexo de diâmetro D e grau máximo Δ,

a) Fixando um vértice v_0, provar que o número de vértices à distância k de v_0 é menor ou igual a $\Delta(\Delta-1)^{k-1}$;

b) Concluir que o número total de vértices de G é menor ou igual a

$$1+\Delta\frac{(\Delta-1)^D-1}{\Delta-2}$$

19 - Dada uma árvore $\mathbf{T}$ e um vértice v_0, definimos a excentricidade de v_0 como a distância máxima de v_0 aos outros vértices de $\mathbf{T}$, e dizemos que v_0 é um centro de $\mathbf{T}$ se for um vértice de excentricidade mínima.
Mostrar que dois centros de T têm que ser adjacentes e concluir que uma árvore tem ou 1 ou 2 centros.

20 - Provar que uma árvore com um número par de arestas tem pelo menos um vértice de grau par.

21 - Seja $k>0$ e T uma árvore qualquer com $k+1$ vértices, dos quais escolhemos um para raiz. Mostrar que se G é um grafo simples com grau mínimo (maior ou igual a) k, para qualquer vértice v de G, existe um subgrafo de G isomorfo a T em que a raiz é v.
Sugestão: indução.

22 - Calcular o número de árvores nos vértices $v_1,\cdots,v_n$ com exactamente k folhas.

23 - Mostrar que o grafo complementar de um grafo simples planar com $n\geq 11$ vértices, não é planar.

24 - Mostrar que dado um grafo de ordem n

$$\frac{n}{\alpha(G)}\leq\chi(G)\leq n+1-\alpha(G)$$

onde $\alpha(G)$ designa o número máximo de vértices num conjunto estável.

25 - Seja G um grafo bipartido com n vértices. Mostrar que G tem, no máximo, $\frac{n^2}{4}$ arestas se n é par e $\frac{n^2-1}{4}$ arestas se n é ímpar.

26 - Seja G um grafo simples com $2m$ vértices e mais do que m^2 arestas. Mostrar, por indução em m, que G contém um triângulo.

27 - Mostrar que um grafo bipartido regular de grau $k > 0$ tem um emparelhamento perfeito.

28 - Os vértices de um grafo G estão divididos em três subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \\ C &= \{c_1, c_2, c_3\} \end{aligned}$$

Cada vértice de um dos conjuntos é adjacente a todos os vértices dos outros conjuntos, e não há arestas entre vértices do mesmo conjunto.

a) Justificar se G é Euleriano;

b) Mostrar que G é Hamiltoniano, calculando o número de caminhos hamiltonianos fechados.

29 - Se G é um grafo com n vértices e sem triângulos, então

$$\alpha'(G) = n - \chi(\overline{G})$$

onde $\alpha'(G)$ designa o número de arestas num emparelhamento máximo de G.