Cálculo Diferencial e Integral I

Exame - Parte I - 02 de Julho de 2018

LERC, LEGI, LEE, LEIC-T

Número: **Nome:**

		páginas	cotação
1	2 valores		
2 a)	2 valores		
2 b)	2 valores		
3	4 valores		
4	2 valores		
5 a)	3 valores		
5 b)	3 valores		
6	2 valores		

I

1- Representar sob a forma de uma união de intervalos o conjunto

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\ln(2 - e^{-x})}{4x^2 - 7x - 2} < 0 \right\}$$

e identificar a fronteira de U. U é um conjunto fechado? E limitado?

Resolução : $4x^2 - 7x - 2 = 4(x + \frac{1}{4})(x - 2)$ e portanto o denominador é negativo no intervalo $] - \frac{1}{4}, 2[$ e positivo no exterior desse intervalo.
Por outro lado,

$$\ln(2 - e^{-x}) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2 - e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{-x} < 2 \Leftrightarrow -\ln(2) < x < 0.$$

Como $\ln(2) > 0.5$, concluímos que

$$U =]-\ln(2), -\frac{1}{4}[\cup]0, 2[.$$

A fronteira de U é $\{-\ln(2), -\frac{1}{4}, 0, 2\}$. Como U não contém a sua fronteira, U não é fechado; por outro lado, U é limitado, uma vez que está contido num intervalo limitado.

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x - x)}{1 - \cos(x/2)}; \qquad b) \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x^2 + 1} + x^2 \ln(x)}{x^3 + x + \sin(x)}$$

Resolução : Como se trata de uma indeterminaão, podemos usar a regra de Cauchy,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x - x)}{1 - \cos(x/2)} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{e^x - 1}{(e^x - x)\sin(x/2)};$$

Como temos os limites conhecidos

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} 2 \frac{e^x - 1}{(e^x - x)\sin(x/2)} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{e^x - 1}{x} \frac{x}{(e^x - x)(\sin(x/2)} = 4$$

que também podia ser obtido por nova aplicação da regra de Cauchy:

$$\lim_{x \to 0} 2 \frac{e^x - 1}{\sin(x/2)} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{e^x}{\frac{1}{2}\cos(x/2)} = 4.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x^2 + 1} + x^2 \ln(x)}{x^3 + x + \sin(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5/2}\sqrt{1 + 2x^{-3} + x^{-5}} + x^2 \ln(x)}{x^3(1 + x^{-2} + \frac{\sin(x)}{x^3})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{-1/2} \frac{\sqrt{1 + 2x^{-3} + x^{-5}} + x^{-1/2}\ln(x)}{1 + x^{-2} + \frac{\sin(x)}{x^3}} = 0,$$

notando que

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-1/2}\ln(x) = 0.$$

3 - Considere-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{2e^x + x^2 - x + 1}.$$

Calcular a derivada de $f(x)$, determinar os seus extremos, locais e globais, e a imagem $f(\mathbb{R})$.

Resolução :

$$f'(x) = \frac{e^x(2e^x + x^2 - x + 1) - e^x(2e^x + 2x - 1)}{(2e^x + x^2 - x + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 3x + 2)}{(2e^x + x^2 - x + 1)^2}.$$

O sinal da derivada é determinado apenas pelo binómio no numerador e portanto $f'(x) < 0$ se $1 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ no exterior desse intervalo. Assim, 1 é ponto de máximo e 2 é ponto de mínimo. Para determinar se se tratam de extremos globais de f ou apenas locais, verificamos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2};$$

portanto 2 é ponto de mínimo local, já que obviamente $f(2) > 0$ e $f(x)$ toma valores arbitrariamente próximos de 0; e do mesmo modo 1 é apenas máximo local pois $f(1) = \frac{e}{2e+1} < \frac{1}{2}$. A imagem de f é $f(\mathbb{R}) =]0, \frac{1}{2}[$.

4 - Determinar o valor da constante $a \in \mathbb{R}$ de modo a que a função

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-ax+1}-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

esteja definida e seja contínua para todo o $x \in \mathbb{R}$.
Justificar se, para o valor de a referido na alínea anterior, $g(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.
Sugestão: Não é necessário apresentar a expressão de $g'(x)$; usar a definição de derivada.

Resolução : Para que $g(x)$ seja contínua em 0 tem que estar definida na vizinhança desse ponto e temos que ter

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = \frac{1}{2}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 - ax + 1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2 - ax + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - ax + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 - ax + 1} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - ax}{x(\sqrt{x^2 - ax + 1} + 1)} = -\frac{a}{2}$$

concluímos que tem que se ter $a = -1$. E de facto esse valor garante que $g(x)$ está bem definida para todo o $x \in \mathbb{R}$, uma vez que $x^2 + x + 1 > 0$ para todo o x; obviamente $g(x)$ é contínua para $x \neq 0$ por ser definida por composições, somas e produtos de funções contínuas.
$g(x)$ é sem dúvida diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser definida por composições, somas e produtos de funções diferenciáveis, portanto é suficiente verificar se existe $g'(0)$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - 2 - x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(2\sqrt{x^2+x+1} - 2 - x)(2\sqrt{x^2+x+1} + 2 + x)}{2x^2(2\sqrt{x^2+x+1} + 2 + x)} =$$

$$= lim_{x\to 0} \frac{4(x^2+x+1) - (2+x)^2}{2x^2(2\sqrt{x^2+x+1} + 2 + x)} = lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2x^2(2\sqrt{x^2+x+1} + 2 + x)} = \frac{3}{8}.$$

Concluímos que $g(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

5 - a) Determinar a forma geral das primitivas de

$$h(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}.$$

b) Determinar a expressão da função $\phi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\phi''(t) = \frac{1}{1+t}; \qquad \lim_{t\to -1^+} \phi(t) = 0; \qquad \phi(1) = 0.$$

Resolução : $\int \frac{x}{(x^2-1)^2} = -\frac{1}{2(x^2-1)}$ e portanto as primitivas de $h(x)$ são

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(x^2-1)} + a & \text{se } x < -1 \\ -\frac{1}{2(x^2-1)} + b & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2(x^2-1)} + c & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

$\int \frac{1}{1+t} = \ln|1+t|$ e portanto, para $x > -1$, $\phi'(t) = \ln(1+t) + a$ e consequentemente, integrando por partes,

$$\phi(t) = (1+t)\ln(1+t) - 1 + at + b.$$

$\phi(1) = 0$ implica que $a + b = 1 - 2\ln(2)$; e, como $\lim_{t\to -1}(1+t)\ln(1+t) = 0$,

$$0 = \lim_{t\to -1^+} \phi(t) = -1 - a + b,$$

e concluímos que $a = -\ln(2)$ e $b = 1 - \ln(2)$: simplificando a expressão

$$\phi(t) = (1+t)(\ln(1+t) - \ln(2)).$$

6 - Seja $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ um polinónio cujos coeficientes satisfazem

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0.$$

Justificar que $p(x)$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0,1[$.

Resolução : $\frac{a_k}{k+1}$ são os coeficientes da primitiva de $p(x)$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Com a condição dada no enunciado, $P(0) = P(1) = 0$ e, pelo Teorema de Lagrange, a sua derivada $p(x)$ tem que se anular num ponto de $]0,1[$.

Cálculo Diferencial e Integral I

Exame - Parte II - 02 de Julho de 2018

LERC, LEGI, LEE, LEIC-T

Número: **Nome:**

		páginas	cotação
1 a)	3 valores		
1 b)	3 valores		
2	3 valores		
3	3 valores		
4	2 valores		
5 a)	3 valores		
5 b)	1.5 valores		
6	1.5 valores		

II

1 - Calcular os integrais

$$a)\ \int_0^{\pi} \sin^2(x/2)\,dx; \qquad b)\ \int_0^1 \ln(1+e^x)e^{-x}\,dx.$$

Em b) usar $t = e^x$ ou $t = e^{-x}$.

Resolução : Usando a fórmula $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin 2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$ que é equivalente a $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$,

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x/2)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(x)}{2}\,dx = \left[\frac{x-\sin(x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Este resultado podia também ser deduzido de outras maneiras (integração por partes ou com a mudança de variável $x = \pi - y$, por exemplo).
Usando $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$,

$$\int_0^1 \ln(1+e^x)e^{-x}\,dx = \int_1^e \ln(1+t)\frac{1}{t^2}\,dt =$$

usando uma integração por partes,

$$= \left[\ln(1+t)\left(-\frac{1}{t}\right)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{(1+t)t}\,dt = \ln(2) - \frac{\ln(1+e)}{e} + \int_1^e \frac{1}{(1+t)t}\,dt;$$

este último integral resolve-se decompondo a fracção

$$\int_1^e \frac{1}{(1+t)t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^e = 1 - \ln(1+e) + \ln(2),$$

pelo que o resultado final é

$$\int_0^1 \ln(1+e^x)e^{-x}\,dx = 2\ln(2) - \frac{\ln(1+e)}{e} + 1 - \ln(1+e).$$

A outra mudança de variável evita a primeira integração por partes: $t = e^{-x} \implies x = -\ln(t)$ e

$$\int_0^1 \ln(1+e^x)e^{-x}\,dx = \int_1^{e^{-1}} \ln(1+t^{-1})t\left(-\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_{e^{-1}}^1 \ln(\frac{1+t}{t})\,dt = \int_{e^{-1}}^1 \ln(1+t) - \ln(t)\,dt =$$

por integração por partes em cada parcela

$$= [(1+t)\ln(1+t) - t\ln(t)]_{e^{-1}}^1 = 2\ln(2) - e^{-1}\ln(1+e^{-1}) - e^{-1}$$

2 - Seja A a região contida no primeiro quadrante do plano, limitada pelas curvas

$$y = x, \qquad y = x/2, \qquad y = 2x - x^2.$$

Calcular o volume do sólido obtido pela revolução de A em torno do eixo $y = 0$.

Resolução : usando x como variável de integração,

$$V = \int_0^1 \pi x^2 - \pi(x/2)^2\, dx + \int_1^{3/2} \pi(2x - x^2)^2 - \pi(x/2)^2\, dx = \pi\left[\frac{x^3}{4}\right]_0^1 + \pi\left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{5}{4}x^3\right]_1^{3/2} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}(3/2)^5 - (3/2)^4 + \frac{5}{4}(3/2)^3 - 1/5 + 1 - 5/4\right)$$

cujo valor aproximado é (só como curiosidade) $0.475\pi \approx 1.49226$.

3 - Seja $G :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por $G(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t+x} dt$. Mostrar, por intermédio de uma mudança de variável, que

$$G(x) = e^{-x} \int_x^{2x} \frac{e^s}{s}\, ds$$

e calcular a derivada $G'(x)$.

Resolução : Fazendo a mudança de variável $s = t + x$, obtemos

$$\int_0^x \frac{e^t}{t+x} dt = \int_x^{2x} \frac{e^{s-x}}{s}\, ds = e^{-x} \int_x^{2x} \frac{e^s}{s}\, ds.$$

Usando esta última expressão, e notando que a função integranda é contínua,

$$G'(x) = -e^{-x} \int_x^{2x} \frac{e^s}{s}\, ds + e^{-x}(2\frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x}) = -G(x) + \frac{e^x - 1}{x}.$$

4 - Nota: Devido a uma gralha que passou despercebida, este problema ficou com um grau de dificuldade superior ao pretendido. Apresentam-se abaixo as soluções quer da versão que devia ter saído quer da que ficou no enunciado. Tendo em conta esta situação , o critério de clsssificação da pergunta foi o seguinte: Foi atribuído o máximo entre a cotação da resposta apresentada e 1 valor; e a nota final do Teste II foi multiplicada por 1.1.

Determinar a natureza, convergente ou divergente, do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 - \cos(t)}{t + \sin(t)}\, dt.$$

Resolução : A função integranda é positiva e

$$\frac{2 - \cos(t)}{t + \sin(t)} > \frac{1}{t+1};$$

o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt$ é divergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+1}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t+1}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 + x) - \ln(2) = +\infty.$$

Portanto o integral do enunciado é igualmente divergente.

Determinar a natureza, convergente ou divergente, do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t+\sin(t)}\,dt.$$

Resolução : A razão pela qual o raciocínio anterior não se pode aplicar aqui é que, embora a função integranda seja não negativa e o denominador possa ser majorado por $t+1$, o numerador só pode ser minorado por 0 e portanto não conseguimos de forma directa minorar a função por uma outra com integral impróprio divergente.
Vamos estimar, em função de x, o valor de $\int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t+\sin(t)}\,dt$ do seguinte modo:

$$\int_1^x \frac{1-\cos(t)}{t+\sin(t)}\,dt = \int_1^x \frac{2}{t+\sin(t)} - \frac{1+\cos(t)}{t+\sin(t)}\,dt =$$

$$\int_1^x \frac{2}{t+\sin(t)}\,dt - \ln(t+\sin(t)) + \ln(1+\sin(1)) >$$

$$> \int_1^x \frac{2}{t+1}\,dt - \ln(x+\sin(x)) + \ln(1+\sin(1)) = 2\ln(1+x) - 2\ln(2) - \ln(x+\sin(x)) + \ln(1+\sin(1))$$

e esta função tem claramente limite infinito: podemos por exemplo observar que

$$2\ln(1+x) - \ln(x+\sin(x)) = \ln(1+x) + \ln\left(\frac{1+x}{x+\sin(x)}\right);$$

a segunda parcela tende para 0 quando $x \to +\infty$ enquanto que a primeira diverge para infinito.
Concluímos portanto que este integral é igualmente divergente.

5 - Seja $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

a) Determinar um polinómio $p(x)$, com grau menor ou igual a 3, que satisfaça a condição

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-p(x)}{x^3} = 0$$

b) Sabendo que a quarta derivada de $f(x)$ é dada por $f^{(4)}(x) = \frac{6(3-x)}{(1+x)^5}$, mostrar que, para $0 < x < 1$, se tem

$$\frac{x^4}{64} < |f(x) - p(x)| < \frac{3x^4}{4}.$$

Resolução : O polinómio pretendido é o polinómio de Taylor de terceira ordem, relativo ao ponto 0, da função $f(x)$:

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3,$$

uma vez que este é o único polinómio, de grau menor ou igual a 3, que satisfaz aquela condição.

Podemos calcular os coeficientes de $p(x)$ calculando as sucessivas derivadas ou de outro modo:

$$f(x) = \ln(1+x) - 1 + \frac{1}{1+x};$$

como, para $|x| < 1$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k$, temos $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$; primitivando termo a termo, temos no mesmo intervalo $\ln(1+x) = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$ e portanto $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Assim,

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) - 1 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

e $p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}$.

Sabemos que, como $f(x)$ tem derivada de quarta ordem, vale a fórmula de Taylor com resto de Lagrange: sendo $p(x)$ o polinómio de Taylor de terceira ordem

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(y)}{4!}x^4$$

onde y é um ponto entre 0 e x. Portanto, temos neste caso para qualquer $x > 0$

$$|f(x) - p(x)| = \frac{6(3-y)}{4!(1+y)^5}x^4$$

onde $0 < y < x$. Mas como se verifica facilmente, $\frac{6(3-y)}{4!(1+y)^5}$ é decrescente no intervalo $[0,1]$: derivando,

$$\frac{-(1+y^5 - (3-y)5(1+y)^4}{4(1+y)^{10}} = \frac{3y-8}{2(1+y)^6}.$$

Portanto, como para qualquer $x \in [0,1]$ o y respectivo na fórmula estará entre 0 e 1, substituindo y por 0 e por 1, obtemos respectivamente o majorante e o minorante indicados.

6 - Determinar a série de Taylor, relativa ao ponto $x_0 = 0$, da função

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$$

e identificar o seu intervalo de convergência.

Resolução : A função $F(x)$ é diferenciável e $F'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ que tem série de Taylor

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k-1}$$

que converge no intervalo $|x| < 1$ (ver o cálculo no exercício anterior). A série de Taylor de $F(x)$ obtém-se desta integrando termo a termo:

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}x^k.$$

O raio de convergência é 1; resta ver que nos extremos do intervalo, ou seja para $x = \pm 1$, a série também converge: para $x = 1$ ficamos com $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ e para $x = -1$ com $-\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$; para ambos os casos a série dos módulos é convergente, por exemplo pelo critério integral.