Cálculo Diferencial e Integral I
2017/2018 - semestre 2
LERC, LEGI, LEE, LEIC-T

Teste 1 - 21/04/2018

Justifique todas as suas respostas

1 - (1.5 valores) Determinar, sob a forma de uma união de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq 1\}$$

e indicar, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de A.

Resolução:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x(x+2)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x(x+2)} \geq 0.$$

Comparando os sinais do numerador e do denominador

$$A =]-2, -\sqrt{2}] \cup]0, \sqrt{2}].$$

A tem máximo (e portanto também supremo) igual a $\sqrt{2}$; tem ínfimo igual a -2 mas não tem mínimo uma vez que $-2 \notin A$.

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites seguintes

a) (1.5 valores) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)\sin(5x)}{(2x-x^2)^2}$;

b) (2 valores) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sin(x)+2}$;

Resolução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\sin(5x)}{(2x-x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}\frac{\sin(5x)}{5x}\frac{15x^2}{(2x-x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{15x^2}{(2x-x^2)^2},$$

uma vez que os dois primeiros factores têm limite 1.
Mas

$$\frac{15x^2}{(2x-x^2)^2} = \frac{15}{(2-x)^2}$$

e portanto o limite pedido existe e é igual a $\frac{15}{4}$.

$$\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sin(x)+2} = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sin(x)+2)(\sqrt{x^2+x}+x)} = \frac{x}{(\sin(x)+2)(\sqrt{x^2+x}+x)}.$$

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^{-1}}+1} = \frac{1}{2},$$

e portanto o limite pedido não existe: por exemplo, a sucessão $x_n = \pi/2+2n\pi$ dá o sublimite $\frac{1}{6}$ enquanto que a a sucessão $x_n = -\pi/2+2n\pi$ dá o sublimite $\frac{1}{2}$.

3 - (2 valores) Calcular, ou mostrar que não existe, a derivada no ponto 0 da função contínua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, para $x \neq 0$ é definida pela expressão

$$h(x) = \frac{\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})}{x}.$$

Resolução: Sabendo que h é contínua concluímos que

$$h(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 0,$$

aplicando a Regra de Cauchy ou simplesmente calculando a derivada em $x=0$ de $\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})$.
Portanto $h'(0)$ será igual, se existir, ao limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2x(e^x+e^{-x})},$$

mais uma vez por aplicação da Regra de Cauchy. Como

$$\lim_{x\to 0} e^x+e^{-x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1$$

conclui-se que $h'(0) = \frac{1}{2}$.

4 - Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+x^2-x+1}$$

a) (3 valores) Calcular a derivada de f e identificar os seus intervalos de monotonia e extremos, locais e globais.

b) (2 valores) Justificar que a restrição de f ao intervalo $]-\infty, 1[$ tem inversa g diferenciável e calcular $g'(\frac{1}{2})$.

Resolução: A derivada de f é

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + x^2 - x + 1) - e^x(e^x + 2x - 1)}{(e^x + x^2 - x + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 3x + 2)}{(e^x + x^2 - x + 1)^2}.$$

O sinal da derivada é determinado apenas pelo do polinómio no numerador:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

logo $f(x)$ é crescente nos intervalos $]-\infty, 1]$ e $[2, +\infty[$ e decrescente em $[1, 2]$.
Portanto $f(x)$ tem um máximo local em $x = 1$ (com $f(1) = \frac{e}{e+1}$) e um mínimo local em $x = 2$ (com $f(2) = \frac{e^2}{e^2+3}$). Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

enquanto que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + (x^2 - x + 1)e^{-x}} = 1;$$

concluímos que $f(x)$ não tem extremos globais (e $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$).

Como $f(x)$ é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, 1[$, a restrição da função a esse intervalo é injectiva e portanto tem inversa, designada por g no enunciado, com domínio $]0, \frac{e}{e+1}[$; além disso, $f'(x)$ nunca se anula nesse intervalo e portanto g é diferenciável e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \ \forall y \in]0, \frac{e}{e+1}[;$$

como se tem $f(0) = \frac{1}{2}$,

$$g'(1/2) = \frac{1}{f'(0)} = 2.$$

5 - - Determinar a expressão geral das primitivas de cada uma das funções seguintes

a) (1.5 valores) $\frac{e^x-1}{e^x-x+1}$;

b) (2 valores) $\frac{1}{(3x+2)^3}$;

c) (2.5 valores) $(x+2)\sin(|x|)$.

Resolução:

a) A função está definida em $\mathbb{R}$ (o denominador é sempre positivo e tem valor mínimo 2 para $x=0$); as primitivas são

$$\ln(e^x-x+1)+c, c \in \mathbb{R};$$

b) a função está definida em $\mathbb{R}\setminus\{-2/3\}$; as primitivas são

$$\begin{cases} -\frac{1}{6(3x+2)^2}+a & \text{se } x<-2/3 \\ \\ -\frac{1}{6(3x+2)^2}+b & \text{se } x>-2/3 \end{cases}$$

c) as primitivas são

$$\begin{cases} -(x+2)\cos(x)+\sin(x)+c & \text{se } 0 \le x \\ \\ (x+2)\cos(x)-\sin(x)+c-4 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

6 - (2 valores) Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função o com derivada contínua e $p\in\mathbb{R}$ um ponto tal que $h(p)=p$ e $|h'(p)|<1$.
Aplicando o Teorema do Valor Médio mostrar que existe um intervalo I contendo p tal que

$$\forall x \in I,\ |h(x)-p|<|x-p|.$$

Resolução: Como a derivada é contínua, existe um intervalo I contendo p tal que $|h'(x)|<1$ para todo o $x\in I$; o Teorema do Valor Médio implica que, dado $x\in I$, existe z entre x e p tal que

$$|h(x)-p|=|h(x)-h(p)|=|h'(z)(x-p)|;$$

como $z\in I$, temos $|h'(z)|<1$ e obtemos o resultado do enunciado.