Cálculo Diferencial e Integral I
2017/2018 - semestre 2
LERC, LEGI, LEE, LEIC-T

Teste 2 - 11/06/2018

Justifique todas as suas respostas

1 - Calcular os integrais

$$a) \int_0^{\pi/2} (x+1)\sin(3x)\,dx; \qquad b) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,dx$$

usando em b) a mudança de variável $t = \sqrt{x+2}$.

Resolução :

$$\int_0^{\pi/2} (x+1)\sin(3x)\,dx = \left[-(x+1)\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos(3x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{9}.$$

$t = \sqrt{x+2} \implies x = t^2 - 2;$

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2-1)t}2t\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,dt =$$

usando o método dos coeficientes indeterminados,

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt = [\ln(t-1) - \ln(t+1)]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}};$$

simplificando o resultado obtém-se

$$\ln\left(\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}\right).$$

2 - Calcular a área da região do plano

$$A = \{(x,y) : \frac{1}{x+1} < y < 3 - |x|\}.$$

Resolução : A condição define de facto uma região com duas componentes, uma contida no semi-plano $x > -1$ e outra no semi-plano $x < -1$, sendo que esta última é ilimitada e tem área infinita; o objectivo da pergunta era naturalmente calcular a área da primeira destas

componenetes; no entanto foi dada cotação total às respostas correctas que consideraram ambas as componentes.
Nesta resolução considerar-se-á apenas a componente limitada contida no semi-plano $x > -1$. os pontos de intersecção da hipérbole $y = \frac{1}{x+1}$ com $y = 3 - |x|$ são calculados considerando separadamente os casos $x > 0$ e $x < 0$; obtêm-se duas equações quadráticas na variável x com raizes $x = 1 \pm \sqrt{3}$ e $x = -2 \pm \sqrt{2}$, respectivamente. Destes, o ponto de abcissa $1 - \sqrt{3}$ corresponde à intersecção da hipérbole com a recta $y = 3 - x$ num ponto que já não pertence a $y = 3 - |x|$, por ser $1 - \sqrt{3} < 0$; por outro lado, o ponto de abcissa $-2 - \sqrt{2}$ está no semi-plano $x < -1$ e corresponde à intersecção da recta $y = 3 + x$ com o ramo da hipérbole aí contido. A área é dada por

$$\int_{-2+\sqrt{2}}^{0} 3 + x - \frac{1}{x+1}\, dx + \int_{0}^{1+\sqrt{3}} 3 - x - \frac{1}{x+1}\, dx =$$

$$= \left[3x + \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)\right]_{-2+\sqrt{2}}^{0} + \left[3x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)\right]_{0}^{1+\sqrt{3}} ;$$

simplificando o resultado obter-se-ia

$$4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2}\right).$$

3 - Seja $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3 + t}}\, dt.$$

a) Calcular $F'(x)$ e determinar o valor do limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{F(x)}{\ln(x)}.$$

b) Determinar se cada um dos limites seguintes é finito

$$\lim_{x \to 0^+} F(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

e justificar se a função $F(x)$ é limitada.

Resolução : Como a função integranda é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}.$$

O limite pedido na alínea a) é uma indeterminação; podemos aplicar a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}}{1/x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para a alínea b) podemos começar por lembrar que $F(x)$ é monótona crescente e portanto os limites existem, finitos ou infinitos; se $0 < x < 1$,

$$0 < \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}\,dt < \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2 - 2\sqrt{x} < 2;$$

concluímos que

$$-2 < F(x) < 0$$

para $0 < x < 1$ e portanto $-2 \leq \lim_{x\to 0^+} F(x) < 0$.
Por outro lado, para $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}\,dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3}}\,dt,$$

e este último integral converge, quando $x \to +\infty$, para 2. Portanto, $0 < \lim_{x\to+\infty} F(x) \leq 2$.
Concluímos que, como $F(x)$ é monótona crescente, $-2 \leq F(x) \leq 2$, ou seja, $F(x)$ é limitada.

4 - Determinar o polinómio de Taylor, de terceira ordem, relativo ao ponto 0, da função $f(x) = (x+2)\ln(1+x)$ e usá-lo para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2x}{x^3}.$$

Resolução : O polinómio pedido é

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3.$$

É possível calcular as derivadas até à terceira ordem e o seu valor no ponto $x = 0$, ou usar o desenvolvimento em série de potências

$$\ln(1+x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k},$$

válida para $|x| < 1$, e que se pode deduzir do desenvolvimento

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k,$$

válido no mesmo intervalo, integrando termo a termo.
Aquele desenvolvimento em série implica que

$$f(x) = (x+2)(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = 2x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e que portanto

$$p(x) = 2x + \frac{x^3}{6}$$

é o polinómio de Taylor pedido no enunciado.
Aquela fórmula explica como calcular o limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

5 - Justificar que

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!k}.$$

Resolução : Para todo o $t \in \mathbb{R}$

$$e^t = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!},$$

e portanto

$$\frac{e^t - 1}{t} = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{k!}$$

para todo o $t \neq 0$ (mas a igualdade é válida para $t = 0$ se definirmos a expressão do lado esquerdo como 1, valor do limite daquela função quando $t \to 0$). Como uma série de potências pode ser integrada termo a termo, no interior do seu intervalo de convergência, obtemos

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt = \int_0^1 \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{k!}\, \underset{\cdot}{t} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \int_0^1 t^{k-1}\, dt = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!k}.$$