Cálculo Diferencial e Integral I

Problemas de preparação para o Teste

1 - Representar, sob a forma de uma união de intervalos, o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + |x+2| \leq x+8\},$$

e determinar os seus ínfimo e supremo.

Sendo U o conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n\geq 0}$ definida por $u_n = \frac{10-9n}{4n+5}$, determinar se o conjunto $A \cup U$ é limitado, fechado ou aberto.

Resolução:

$A = \{x \in [-2,+\infty[: x^2+x+2 \leq x+8\} \cup \{x \in]-\infty,-2] : x^2-x-2 \leq x+8\}$;

a primeira inequação é equivalente a $x^2 - 6 \leq 0$ e tem portanto conjunto solução $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$, enquanto que a segunda é equivalente a $x^2 - 2x - 10 \leq 0$ e tem conjunto solução $[1-\sqrt{11}, 1+\sqrt{11}]$.
$-sqrt6 < -2$ e $1 - \sqrt{11} < -2$, portanto

$$A = [-2, \sqrt{6}] \cup [1-\sqrt{11}, -2] = [1-\sqrt{11}, \sqrt{6}].$$

O ínfimo (e mínimo) de A é $1-\sqrt{11}$ e o supremo (e máximo) é $\sqrt{6}$.
A sucessão u_n é convergente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{10-9n}{4n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{10n^{-1}-9}{4+5n^{-1}} = -\frac{9}{4};$$

portanto a sucessão é limitada, e como o A também é limitado, $A \cup U$ é limitado.
O conjunto não é aberto: basta, por exemplo, ver que $\sqrt{6} \in A \cup U$ não é um ponto interior, uma vez que $A \cup U$ não contém nenhum intervalo aberto contendo $\sqrt{6}$. Uma maneira talvez mais concreta de apresentar a justificação é dizendo que o complementar do conjunto não é fechado, uma vez que, porexemplo a sucessão convergente de termo geral $x_n = \sqrt{6} + \frac{1}{n}$ está contida em $\mathbb{R} \setminus (A \cup U)$ mas o seu limite não pertence aquele conjunto.
O conjunto $A \cup U$ é fechado: para verificarmos isso, notamos primeiro

que A é sem dúvida fechado; ora o limite da sucessão u_n pertence ao interior de A pois

$$1 - \sqrt{11} < -\frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{13}{4} < \sqrt{11} \Leftrightarrow 13^2 < 16 \times 11$$

que 'e uma desigualdade verdadeira. Portanto, todos os termos da sucessão a partir de uma certa ordem estão em A, logo $A \cup U$ é a união de um intervalo fechado com um conjunto finito de pontos e portanto fechado.
De facto, como se pode verificar facilmente (e como consequência de uma gralha na redacção do exercício...), todos os termos da sucessão estão contidos em A e portanto $A \cup U = A$.

2 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites

$$\begin{array}{ll}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(x^2)} & R: 1 \\
\lim_{x\to \pi} \frac{\cos(x/2)}{\sin(3x)} & R: \frac{1}{6} \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{n+n^2\ln(n)}{\sqrt{n^5+n+1}} & R: 0 \\
\lim_{x\to +\infty} (\cos(2/x))^{x^2} & R: e^{-2} \\
\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!+3^n}{n^3+(3n)!}} & R: 0 \\
\lim_{x\to +\infty} x(\arctan(x) - \frac{\pi}{2}) & R: -1
\end{array}$$

3 - Considere-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em todo o seu domínio, definida, para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x + e^{-ax}} - 1}{x},$$

onde a é um parâmetro real positivo.

a) Calcular $f(0)$ em função do parâmetro a; **R:** $f(0) = \frac{1-a}{2}$;

b) Determinar para que valores do parâmetro a é que f está de facto bem definida em $\mathbb{R}$. **R:** $a \in [e, +\infty[$;

4 - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} + 2x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

a) Determinar se f é contínua no seu domínio; **R:** Sim;

b) Calcular, nos pontos em que existir, a derivada $f'(x)$;

R: $f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} + 2 & x > 0 \\ \text{não existe} & x = 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$;

c) Determinar os intervalos de monotonia e a existência de assíntotas do gráfico de f, e a imagem $f(\mathbb{R})$.
R: f é decrescente em $]-\infty, -1[$ e crescente em $]-1, +\infty[$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (assíntota horizontal) e à direita f tem assíntota $y = 2x - 1$. A imagem é $f(\mathbb{R}) = [-1/2, +\infty[$.

d) Determinar a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $-1/2$. **R:** $y = \frac{12}{25}x - \frac{4}{25}$

5 - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, com $f''(x)$ limitada e satisfazendo $f(0) = f'(0) = 0$.
Mostrar, usando o Teorema do Valor Médio, que existe uma constante M tal que

$$|f(x)| \leq Mx^2.$$

6 - Determinar os extremos e intervalos de monotonia da função

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x}(x^3 + 2x + 2).$$

Mostrar que a equação $h(x) = c$ tem no máximo 4 soluções.
R: h é crescente em $]-\infty, 0[\cup]1, 2[$ e decrescente em $]0, 1[\cup]2, +\infty[$. Tem mínimo relativo em $x = 1$e máximos em $x = 0$ (este absoluto) e $x = 2$.

7 - Determinar uma primitiva das funções

$$(2x+1)^5, \qquad 2x\sin(3x^2), \qquad \frac{e^x}{3+2e^x}, \qquad \frac{\sqrt{2+\ln(x)}}{x}$$

R:

$$\frac{(2x+1)^6}{12}, \qquad -\cos(3x^2)/3, \qquad \frac{\ln(3+2e^x)}{2}, \qquad \frac{2}{3}(2+\ln(x))^{3/2}$$

8 - Determinar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$f'(x) = \sin(2x)\cos(1 - |x|), \qquad f(0) = 1.$$

R:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\left(\frac{\sin(2x)}{4}\sin(1-x) - \frac{\cos(2x)}{2}\cos(1-x)\right) + 1 - \frac{2}{3}\cos(1) & x \geq 0 \\ \\ -\frac{4}{3}\left(\frac{\sin(2x)}{4}\sin(1+x) + \frac{\cos(2x)}{2}\cos(1+x)\right) + 1 - \frac{2}{3}\cos(1) & x \leq 0 \end{cases}$$

9 - Determinar todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem as condições

$$f''(x) = \frac{1}{x}\ \forall x \neq 0, \qquad f'(1) = 1.$$

R:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) + c & x \geq 0 \\ \\ x\ln(x) + bx + c & x \leq 0 \end{cases}$$

com $b, c \in \mathbb{R}$.

10 - Justificar, usando directamente a definição de limite, que se $\lim_n u_n = L$ então

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u_n = L.$$

11 - Justificar, usando o Teorema do Valor Médio, que, para todos os $x_1, x_2 \in \mathbb{R}+$ e todo o $t \in [0,1]$

$$\ln(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t\ln(x_1) + (1-t)\ln(x_2).$$

Provar por indução que para todo o $n \geq 2$ e para todos os $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}+$ e $t_1, \cdots, t_n \in [0,1]$ tais que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$,

$$\ln(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i \ln(x_i).$$