Cálculo Diferencial e Integral I

Problemas de preparação para o Teste II

1 - Calcular o integral

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} dx$$

através da mudança de variável $x = \sin(y)$.

Resolução:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2(y)}}{\sin(y)+1} \cos(y)\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2(y)}{\sin(y)+1}\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-sin^2(y)}{\sin(y)+1}\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1 - \sin(y)\, dy = [y + \cos(y)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2 - Calcular, por integração por partes,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(x+1)^3}\, dx.$$

Resolução:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(x+1)^3}\, dx. = [-\frac{1}{2(x+1)^2} \ln(1+x^2)]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(x+1)^2} \frac{2x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\ln(2)}{8} + \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(1+x^2)}\, dx;$$

Determinamos constantes A_0, A_1, B_0, B_1 satisfazendo

$$\frac{x}{(x+1)^2(1+x^2)} = \frac{A_0 + A_1(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{B_0 + B_1 x}{1+x^2};$$

isso pode ser feito pelo método dos coeficientes indeterminados, ou seja, reduzindo a soma da direita ao mesmo denominador e igualando os numeradores para obter equações para os coeficientes: neste caso temos

$$x = (A_0 + A_1(x+1))(1+x^2) + (B_0 + B_1 x)(1+x)^2 \ \forall x \in \mathbb{R};$$

podemos deduzir equações para os A_i e B_i quer comparando coeficientes de monómios do mesmo grau, quer comparando valores de ambos os lados da igualdade para diferentes valores de x: por exemplo, o coeficiente de x^3 na expressão do lado direito é $A_1 + B_1$ e portanto obtemos a equação

$$A_1 + B_1 = 0;$$

já o termo independente do lado direito, ou seja, o coeficiente de x^0, é $A_0 + A_1 + B_0$ e portanto

$$A_0 + A_1 + B_0 = 0;$$

por outro lado, atribuindo por exemplo o valor $x = -1$, obtemos a igualdade

$$2A_0 = -1;$$

e pondo $x = 1$,

$$2A_0 + 4A_1 + 4B_0 + 4B_1 = 1;$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos

$$A_0 = B_0 = 1/2; A_1 = B_1 = 0,$$

e portanto

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(1+x^2)}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(1+x^2)}\right) dx = \left[-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)\right]_0^1$$

3 - Calcular o integral

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2\sqrt{x+1}}\,dx$$

usando a mudança de variável $y = \sqrt{x+1}$.

Resolução: Temos $x = y^2 - 1$ e

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2\sqrt{x+1}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(y^2-1)^2 y} 2y\,dy = 2\int_{\sqrt{1}}^2 \frac{2}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

Neste caso precisamos de determinar constantes A_i e B_i satisfazendo

$$\frac{1}{(y^2-1)^2} = \frac{1}{(y-1)^2(y+1)^2} = \frac{A_0 + A_1(y-1)}{(y-1)^2} + \frac{B_0 + B_1(y+1)}{(y+1)^2}.$$

Em vez de seguir o mesmo caminho do exercício anterior, vamos determinar as constantes por outro m]́etodo, baseado na fórmula de Taylor: multiplicando ambos os lados da igualdade por $(y-1)^2$ obtemos

$$\frac{1}{(y+1)^2} = A_0 + A_1(y-1) + (y-1)^2\left(\frac{B_0 + B_1(y+1)}{(y+1)^2}\right),$$

ou seja, sendo $f(x) = \frac{1}{(y+1)^2}$,

$$f(x) = A_0 + A_1(y-1) + o(y-1),$$

e portanto $A_0 + A_1(y-1)$ é o polinómio de Taylor de $f(x)$ de segunda ordem, relativo ao ponto $y_0 = 1$. Assim

$$A_0 = f(1) = \frac{1}{4}, \qquad A_1 = f'(1) = -\frac{1}{4}.$$

Um cálculo semelhante, multiplicando por $(y+1)^2$, conduz a, designando $g(x) = \frac{1}{(y-1)^2}$,

$$g(x) = B_0 + B_1(y+1) + o(y+1)$$

e portanto

$$B_0 = g(-1) = \frac{1}{4}, \qquad B_1 = g'(-1) = -\frac{1}{4}.$$

Assim, o integral acima fica igual a

$$\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{(y-1)^2} - \frac{1}{y-1} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y+1} =$$

$$= \left[-\frac{1}{y-1} - \ln(y-1) - \frac{1}{y+1} - \ln(y+1)\right]_{\sqrt{2}}^2.$$

4 - Calcular a área da região do plano representada pelo conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3 - x^2 \wedge -2x \leq y \leq 1 - x\}$$

Resolução: A parábola $y = 3 - x^2$ intersecta a recta $y = -2x$ nos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -6)$, e intersecta a recta $y = 1-x$ nos pontos $(-1, 2)$ e $(2, -1)$. A região A é a união

$$\{(x, y) : -1 < x < 2, -2x < y < 1-x\} \cup \{(x, y) : 2 < x < 3, -2x < y < 3-x^2\}$$

e a sua área é

$$\int_{-1}^{2} 1-x-(-2x)\,dx + \int_{2}^{3} 3-x^2-(-2x)\,dx = [x+\frac{x^2}{2}]_{-1}^{2} + [3x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_{2}^{3}.$$

5 - Calcular o volume do sólido gerado pela revolução em torno do eixo $x = 0$ do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 \leq y \leq x\}.$$

Resolução: a parábola $y = (x - 2)^2$ intersecta $y = x$ nos pontos $(1, 1)$ e $(4, 4)$; para cada $0 < y < 4$, a intersecção do sólido com o plano perpendicular ao eixo $x = 0$ nesse valor de valor de y é uma coroa circular; se $0 < y < 1$, as circunferências interior e exterior dessa coroa são determinadas pelos dois pontos da parábola correspondentes: $y = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y}$ e estes dois valores são os raios dessas circunferências; se $1 < y < 4$, a circunferência interior édeterminada pela recta $x = y$ e a exterior pelo ramo da parábola $x = 2 + \sqrt{y}$.
De acordo com a fórmula para o volume com integral da área dessas coroas circulares, temos

$$V = \int_{0}^{1} \pi(2 + \sqrt{y})^2 - \pi(2 - \sqrt{2})^2\,dy + \int_{1}^{4} \pi(2 + \sqrt{2})^2 - \pi y^2\,dy.$$

É também possível calcular o volume como o integral das áreas das superfícies cilíndricas determinadas por cada valor de x: para cada $1 < x < 4$, essa secção cilíndrica do sólido tem área $2\pi x(x - (x-2)^2)$ e portanto

$$V = \int_1^4 2\pi x(x - (x-2)^2)\, dx.$$

6 - Determinar o domínio e a derivada da função

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{1+\ln(t)} dt$$

7 - Determinar para que $x > 0$ é que o integral

$$\int_x^{x+1} \sqrt{t}e^{-t}\, dt$$

tem valor máximo.
Determinar se o integral

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, dt$$

é convergente ou divergente.

Resolução: A função

$$F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_x^{x+1} \sqrt{t}e^{-t}\, dt$$

é diferenciável e

$$F'(x) = \sqrt{x+1}e^{-(x+1)} - \sqrt{x}e^{-x} = e^{-x}(\sqrt{x+1}e^{-1} - \sqrt{x}).$$

Portanto

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}} > e \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e^2-1};$$

ou seja $F'(x)$ é positiva no intervalo $]0, \frac{1}{e^2-1}[$ e negativa em $]\frac{1}{e^2-1}, +\infty[$, e $F(x)$ atinge o valor máximo em $x = \frac{1}{e^2-1}$.

Para determinar se o integral

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, dt$$

é convergente ou divergente, podemos comparar a função integranda com $e^{-t/2}$: como

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}e^{-t}}{e^{-t/2}} = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{t}e^{-t/2} = 0,$$

por aplicação da regra de Cauchy, podemos concluir que existe M tal que

$$x > M \implies \sqrt{t}e^{-t} < e^{-t/2}.$$

Logo

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, dt = \int_0^{M} \sqrt{t}e^{-t}\, dt + \int_M^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, dt$$

e a primeira parcela é finita, por ser o integral de uma função contínua limitada num intervalo limitado, enquanto que

$$\int_M^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\, dt < \int_M^{+\infty} e^{-t/2}\, dt = \lim_{b\to+\infty} [-2e^{-t/2}]_M^b = 2e^{-M/2}.$$

Em conclusão, o integral é convergente.

8 - Justificar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+t+1}\, dt < \pi/2.$$

Verificar que

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^2} < \frac{t}{t^3+t+1}$$

e que portanto

$$\pi/4 < \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+t+1}\, dt.$$

Resolução:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+t+1}\, dt < \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = \pi/2.$$

A desigualdade
$$\frac{t^2}{(t^2+1)^2} < \frac{t}{t^3+t+1}$$
é equivalente, para $t > 0$ a
$$t^2(t^3+t+1) < t(t^2+1)^2 \Leftrightarrow 0 < t^3 - t^2 + t$$
que se verifica facilmente ser verdadeira. Portanto
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+t+1}\, dt > \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\, dt;$$
Este último integral pode ser calculado por uma integração por partes:
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2} t\, dt = [-\frac{t}{2(t^2+1)}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t^2+1)}\, dt.$$
A primeira parcela tem o valor 0 enquanto que a segunda é $\pi/4$.

9 - Determinar um polinómio $p(x)$ com grau o menor possível que satisfaça a condição
$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{x^2+3}{1+x} - p(x)}{(x-1)^3} = 0$$

Resolução: O polinómio de Taylor de terceira ordem da função $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1+x}$, relativo ao ponto $x_0 = 1$, é o único polinómio de grau menor ou igual a 3 que satisfaz aquela condição. Esse polinómio é
$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3$$
mas podemos determinar os seus coeficientes sem calcular directamente as derivadas: sabemos que
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k$$
para $|x| < 1$. Do mesmo modo,
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0}(-1)^k \left(\frac{x-1}{2}\right)^k$$

para $|fracx - 12| < 1$, e portanto, nesse intervalo,

$$f(x) = (x^2+3)\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k.$$

O resto de terceira ordem desta série $S_3(x) = \sum_{k>3}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k$ satisfaz a condição

$$\lim_{x\to 1}\frac{S_3(x)}{(x-1)^3} = 0.$$

Portanto

$$f(x) = (x^2+3)\left(\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k + o((x-1)^3)\right);$$

como o segundo factor é um polinómio representado em potências de $x-1$, reescrevemos também o primeiro factor nessa forma: fazendo $z = x-1$,

$$x^2+3 = (z+1)^2+3 = 4+2z+z^2 = 4+2(x-1)+(x-1)^2$$

e finalmente

$$f(x) = (4+2(x-1)+(x-1)^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{x-1}{4} + \frac{(x-1)^2}{8} - \frac{(x-1)^3}{16} + o((x-1)^3)\right) =$$

$$= 2 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{4} + o((x-1)^3)$$

e portanto, pelo resultado citado acima, o polinómio pretendido é

$$p(x) = 2 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{4}.$$

10 - Determinar a série de Taylor, relativa ao ponto 1, da função $g(x) = \ln(1+x)$ e indicar qual o maior intervalo aberto em que a série representa a função.

Resolução: Notamos que $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$. Como se viu no exercício anterior,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-1)^k$$

no intervalo em que a série converge, ou seja $|\frac{x-1}{2}| < 1$. No interior desse intervalo, a série de potências pode ser primitivada termos a termo, sendo que a série resultante converge no mesmo intervalo. Assim

$$sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)2^{k+1}}(x-1)^{k+1}$$

é uma primitiva de $\frac{1}{1+x}$ naquele intervalo e portanto difere de $\ln(1+x)$ por uma constante. Fazendo $x = 1$ na série, concluímos que, sempre no intervalo $|\frac{x-1}{2}| < 1$,

$$\ln(x) = \ln(2) + sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)2^{k+1}}(x-1)^{k+1},$$

e portanto esta é a série de Taylor pretendida.

11 - Determinar o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{2^k k^2}$$

Resolução: O raio de convergência R da série é determinada por

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^k k^2}} = \frac{1}{2}$$

e portanto a série converge para $|x+1| < 2$ e diverge se $|x+1| > 2$. Resta verificar o comportamento da série nos extremos do intervalo: se $x = 1$ ficamos com

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$$

que é convergente, o que se pode comprovar por exemplo por comapração com o integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$. Se $x = -3$ a s'erie é

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

que é também convergente, já que a série dos módulos converge.