Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 1

1 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-5| \geq 3|x+3|\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-4| < 8\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-2| \leq x\}$$

2 - Representar sob a forma de uma união de intervalos os conjuntos

$$X = \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{2x+1}{x-2} \leq 1\}$$

$$Y = \{x \in \mathbb{R} : \ln\left(\tfrac{x}{x-1}\right) < 1\}$$

$$W = \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{1}{x} < x\}$$

$$Z = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x^3+x-2) \leq 0\}$$

$$U = \{x \in \mathbb{R} : \tfrac{(x-3)(x^2-2)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0\}$$

3 - Determinar o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, das inequações

$a)$ $x^3 - 6x < x^2$ $\qquad$ $b)$ $x + \dfrac{1}{x} > 4$

$c)$ $x > \dfrac{2}{x+1}$ $\qquad$ $d)$ $x + 2 < \dfrac{2}{x(x-1)}$

$e)$ $\dfrac{x-2}{3} < \sqrt{x+2}$ $\qquad$ $f)$ $\sqrt{x+1} < \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}$

$g)$ $|2|x-1|-3| < 6$ $\qquad$ $h)$ $|x+2| > \dfrac{|x|}{x-1}$

4 - Sendo $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ e X o conjunto do problema 2, determinar os conjuntos

$$\{f(x) : x \in X\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in X\}$$

.

5 - Dados números reais $a_1 < a_2 < a_3$, determinar para que escolhas de sinais é que a função definida por

$$f(x) = |x - a_1| \pm |x - a_2| \pm |x - a_3|$$

é majorada.
Generalizar o resultado para o caso de n números reais $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

6 - Determinar o domínio máximo de definição das seguintes funções de variável real

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - x}; \qquad g(x) = \frac{1}{\log(x^2 - 1)}; \qquad h(x) = \frac{\log(5 - x)}{\sqrt{e^x + x - 1}}.$$

7 - Considerando os conjuntos B e U dos exercícios 1 e 2 e $I = [-2, 2]$, determinar se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

$$\exists y \in B \; \forall x \in I : x + y \in U$$

$$\forall x \in I \; \exists y \in B : x + y \in U$$

Sugestão: para a primeira proposição, notar que, dado um intervalo $I = [a, b]$ e $y \in \mathbb{R}$, se tem $\{x + y : x \in I\} = [a + y, b + y]$.
Para a segunda, estudar a negação da proposição.

8 - Considerando os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \geq x^2\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} \in \mathbb{N}\}$$

determinar o valor lógico das proposições

$$\forall x \in B \; \exists y > x \; \forall z (x < z < y \Rightarrow z \in B^c)$$

$$\forall x \in A \cap B \; \exists y > x \; \forall z (x < z < y \Rightarrow z \in A \setminus B)$$

9 - Interpretar cada uma das condições seguintes, dando exemplos

de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça essa condição

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : g(x) < a$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x > y \Rightarrow g(x) < g(y))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : (x > y \wedge g(y) > g(x))$$

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : x > z \Rightarrow g(x) > y$$

10 - Dadas as condições

$$\exists a > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : g(x + a) = g(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists a > 0 : g(x + a) = g(x)$$

dar exemplos de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça a primeira condição e de outra que satisfaça a segunda mas não a primeira.

11 - Dar exemplos, ou mostrar que não existe, de funções satisfazendo cada uma das condições:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ sobrejectiva;

b) $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ injectiva mas não sobrejectiva;

c) $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ sobrejectiva mas não injectiva;

d) $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ bijectiva;

e) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ sobrejectiva;

f) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sobrejectiva.

12 - Determinar, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, dos conjuntos

$$\{0.2, 0.22, 0.222, \ldots\},$$

$$\{x + \tfrac{1}{x} : x \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\{e^{-\frac{1}{x}} : x > 0\}$$

13 - Determinar, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, dos conjuntos

$$[0, \pi] \cap \mathbb{Q}, \qquad [0, \pi] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

14 - Qual é o menor intervalo fechado I que contém o conjunto

$$D = \{\cos(\frac{n\pi}{2}) - \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

E se se tratar de um intervalo aberto?

15 - Determinar, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, do conjunto

$$A = \left\{ 2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

16 - Dar exemplos de

$$x \in \mathbb{Q} \cap [\pi, \pi + \frac{1}{\pi}]$$

e de

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{7}, \frac{2}{7}]$$