Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 2

1 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$\lim_{x\to 0} x\cos(\frac{1}{x})$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x+2x}{x+x^2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$

2 - Determinar as constantes a e b, de modo a que se verifique

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 8$$

3 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-|x+1|}$$

4 - Calcular, ou mostrar que não existem, os seguintes limites:

$\lim_{x\to+\infty} x\sin^2 x$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x-7}{x(1-2x)^2}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sqrt[3]{x^7+1}+\cos(x^2)}{x^3+\sqrt{x^5+1}+3}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+1}$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

5 - Calcular, em função de $p,q\in\mathbb{N}$ os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-p)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+q)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-p)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+q)}$$

6 - Neste problema $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x; por exemplo $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ e $\lfloor -1.45 \rfloor = -2$. Calcular ou mostrar que não existem os limites

$$\lim_{x \to a} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \qquad \lim_{x \to a} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad \lim_{x \to a} \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$$

para $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$.

7 - Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ mas $\lim_{x \to a} g(x)$ não existe, pode existir $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x))$? E $\lim_{x \to a}(f(x)g(x))$?

8 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\tfrac{\sqrt{n^2-1}+(-1)^n n}{2n+3} \qquad \tfrac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$$

$$\tfrac{(3^n+1)^2}{1+7^n} \qquad \tfrac{2^{n+3}+5^{n+1}}{3^{n+2}+5^{n+4}}$$

$$\tfrac{n+(-1)^n(n+1)}{n+\sqrt{n}+1}$$

9 - Sejam a, b dois reais positivos. Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} \qquad \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

10 - Calcular ou mostrar que não existem os limites das sucessões seguintes

$$\sqrt[n]{2 + \cos(n)} \qquad \sqrt[n]{4^{(-1)^n} + 5}$$

$$\sqrt[n]{\tfrac{n^2+n+1}{n^3+n+2}} \qquad \sqrt[n]{2^{n+2} + n^2}$$

$$\sqrt[n]{n^2 \cos^2(n) + n + \tfrac{1}{n}}$$

11 - Determinar, se existir, o limite das sucessões definidas pelas expressões seguintes:

$$\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^n; \qquad \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n; \qquad \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n^2}; \qquad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

12 - Calcular ou mostrar que não existem os limites das sucessões

$$\frac{n+\sin(n!)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+1}(\sqrt{n}+(-1)^n\sqrt[3]{n})} \qquad \frac{2^{3n}+n^7}{5^n+(n-1)!}$$

$$\sqrt[n]{n^2+2^n+(-2)^n}$$

13 - Determinar o conjunto dos sublimites das sucessões definidas pelas expressões seguintes:

$$\left(\cos\frac{n\pi}{3}\right)^n \qquad \frac{(1+\cos n\pi)\ln 3n+\ln n}{\ln 2n} \qquad \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$$

14 - Determinar o limite das sucessões

$$\frac{a^n n^k}{n!},\ \ a>1,\ k\in\mathbb{N} \qquad \frac{n!}{2^{n^2}}$$

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \frac{a^n n!}{n^n}$$

15 - Mostrar, usando directamente a definição de limite, que se $\lim_n x_n = L$ então

$$\lim_n \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = L$$

16 - Mostrar que a sucessão

$$u_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

é convergente e que $0.5 \leq \lim u_n \leq 1$.