Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 3

1 - Demonstrar, directamente a partir da definição, a continuidade no respectivo domínio, de cada uma das funções

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) = \sqrt{x+2} \\ b) & f(x) = \frac{x}{1+|x|} \\ c) & f(x) = \cos(x) \end{array}$$

2 - Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

3 - Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(0) = f(2)$. Mostrar que existe pelo menos um $0 \leq x \leq 1$ tal que $f(x) = f(x + 1)$.

4 - Determinar o domínio das funções definidas pelas expressões

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2} \qquad g(x) = \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x} \qquad h(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{\ln^2 x - 1}}$$

Verificar se alguma das funções é prolongável por continuidade a algum ponto aderente ao domínio. Que conclusões se podem tirar sobre as imagens dessas funções?

5 - Mostrar que a equação $(1 - x) \cos x = \sin x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

6 - Dado um polinómio $p(x)$ não nulo, mostrar que a a equação $|p(x)| = e^x$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

7 - Justificar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - x} + 2x^2 + 1}{\sqrt{2x^4 + 2x^3 + 1}}$$

tem máximo e mínimo.

Sugestão: Calcular $f(0)$, $f(-1)$ e os limites $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.