Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 4

1 - Calcular, nos pontos em que existir, a derivada de cada uma das seguintes funções

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$	$f(x) = \sqrt[3]{x}\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f(x) = x\lvert x\rvert$
$f(x) = \frac{x}{\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert}$	$f(x) = \sqrt{x^4+x^2}$
$f(x) = \sqrt[3]{x}\sin x$	$fractan^3 x^2 - \tan^2 x^3 x$
$f(x) = (\sin(x)+1)^{\cos(x)}$	$f(x) = \log_x 2$

2 - Determinar as constantes a, b, c, d de modo a que a função

$$\begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ cx^2+dx & 0 < x \leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

3 - Calcular as derivadas das funções

$$\arccos(x), \qquad \arcsin(x), \qquad \arctan(x)$$

4 - Calcular as derivadas das funções

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

5 - Determinar as constantes a, b de modo a que a função

$$\begin{cases} ae^x - e^{2x} & x \leq 0 \\ \ln(1+x^2)+b & x > 0 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.
Determinar a equção da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.

6 - Determinar a equação das rectas que passam no ponto $(0, -1)$ e são tangentes à parábola $y = x(x + 1)$.

7 - Com uma folha quadrada de lado 10 cm, pretendemos construir uma caixa (sem tampa) recortando um pequeno quadrado em cada canto. De que tamanho devem ser os recortes para que o volume da caixa seja máximo?

8 - Qual o cilindro com volume V que tem superfície com menor área?

9 - Determinar, em função do parâmetro a, quantas raizes reais tem o polinómio $p(x) = x^3 - 3x^2 - a$.

10 - Mostrar que todo o número real x satisfaz a desigualdade

$$4x^3 - 3x^4 \leq 1.$$

11 - Determinar qual o comprimento mínimo de um segmento vertical (ou seja, paralelo ao eixo $x = 0$) com um extremo na curva $y = 4x^3$ e o outro na curva $y = x^4 + 29$.

12 - Determinar os extremos e intervalos de monotonia das funções

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{-x}(x^2 - x - 1)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$h :: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = e^{-x^2+x}(1 - x)$$

13 - Mostrar que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três soluções reais.

14 - Justificar que a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(\pi x) - 4x$$

tem inversa e calcular a derivada de f^{-1} no ponto 1.