

Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 5

1 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

a) $\frac{1}{2x-1}$; b) $\left(\frac{3}{2-3x}\right)^2$; c) 3^x ; d) $\sin(3x)$;
e) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$; f) $e^{|x|}$; g) $\frac{|x-3|}{|x+1|+|x-1|}$;

2 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

a) $\frac{e^x}{3e^x+1}$; b) $\cos x \sin x$; c) $\tan x$;
d) $x\sqrt{x^2+1}$; e) $\frac{x}{1+x^2}$; f) $\frac{x^2}{1+x^2}$;
g) $\frac{1+x}{3+x^2}$; h) $\frac{x^3}{\sqrt{5+2x^4}}$; i) $\frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}$;
j) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$; l) $\frac{x}{\sqrt{5-2x^4}}$;

3 - Existe uma função $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que $g'(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}$?

4 - A função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições

$$h'(x) = \frac{x}{|x|+2}, \forall x \in \mathbb{R}; \quad h(-1) = 1$$

Calcular $h(1)$.

5 - Sabendo que a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as condições

$$h'(x) = |x| \cos(2x); \quad h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

calcular $h(-\pi)$.

6 - Recorde que $\tan' x = \sec^2 x$ e calcule as primitivas das funções $\sec x$ e $\sec^3 x$;

Sugestão: comece por calcular $\sec' x$ e use a igualdade $\sec x = \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$;

7 - Calcule as primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

- a) $\sin^3 x$; b) $\cos^4 x$; c) $\sin^4 x \cos^3 x$;
d) $\cos x \cos 2x$; e) $\frac{x}{\cos x^2}$; f) $\frac{\sin x}{\cos x+2}$;

8 - Calcule primitivas das funções determinadas pelas expressões seguintes:

- a) $x \arctan x$; b) $e^x \sin x$; c) $x^2 \ln x$;
d) $\sqrt{1+x^2}$; e) $\sqrt{1-x^2}$; f) $\frac{x^5}{x^2-1}$;
g) $\frac{x}{x^2+2x+3}$; h) $\frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}$; i) $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;
j) $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; k) $\frac{\sin 2x \cos x}{2+\cos^3 x}$; l) $\frac{1}{\sqrt{2+x(3+x)}}$;

9 - Determine $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$: $F'(x) = \frac{x^2+2}{x^4+2x^3+2x^2}$,
 $F(-1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \pi$.

10 - Determine $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$: $F'(x) = \frac{8 \sinh 2x}{(\cosh^2 2x-1)(\cosh 2x+1)}$
e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

11 - Calcule primitivas das funções seguintes

- a) $\frac{1}{x^2+x+1}$ b) $\frac{x}{x^2+x+1}$ c) $\frac{x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}$;

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \frac{1}{x^2-1}; & \text{e)} \frac{x^3}{x-1}; & \text{f)} \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}; \\ \text{g)} \frac{x+1}{x^3(x-2)^2}; & \text{h)} \frac{x+3}{x^2+x-2}; & \text{i)} \frac{x}{x^2+2x+3}; \end{array}$$

12 - Calcule primitivas das funções seguintes

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ln^3 x; & \text{b)} \cos x \cosh x; & \text{c)} \frac{x^7}{(1-x^4)^2}; \\ \text{d)} \arcsin x; & \text{e)} x \arcsin x; & \text{f)} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^4} \end{array}$$

13 - Determine todas as funções com domínio $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ que satisfazem as condições:

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 + x^2}, \quad f(1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

14 - Determine a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x\sqrt{1+x^2} \quad \text{e} \quad f(0) = 1.$$

15 - Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a condição:

$$f'(x)f(x) = \frac{1}{x+4}.$$