Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 6

1 - Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz as condições $f(x) \geq 0 \ \ \forall x$ e $f(1/2) = 1$.

a) Mostrar que

$$\int_0^1 f(t)\,dt > 0.$$

b) Dado $\epsilon > 0$, dar um exemplo de uma função nessas condições, tal que

$$\int_0^1 f(t)\,dt < \epsilon.$$

2 - Calcular os seguintes integrais:

a) $\int_1^3 e^x \sin(2x)\,dx$

[b) $\int_0^2 x\sqrt{x+3}\,dx$

c) $\int_{-1}^{1/2} \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

d) $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

e) $\int_1^2 \dfrac{1}{x^3+x}\,dx$

f) $\int_1^2 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x-1}}{x+3}\,dx$

h) $\int_0^{\pi/3} \dfrac{\sin(2x)}{1+\sin^4(x)}\,dx$

i) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ em que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{se } x < 0 \\ e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

j) $\int_a^b \frac{1}{x^3(x+1)}\,dx$

k) $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$

3 - Determinar o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+\ln(t)}\,dt; \quad ; \quad H(x) = \int_x^{2x} e^{-t}\sqrt{t}\,dt.$$

4 - Considerar a função $F : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$$

Mostrar que o gráfico de $F(\sqrt{x})$ tem um único ponto de inflexão.

5 - Considerar a função $F : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^1 \sqrt[3]{1 - xt} dt$$

Mostrar que para $x \neq 0$ se tem

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt[3]{1 - t} dt$$

e calcular $F'(x)$.

6 - Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, justificar as desigualdades

$$0 < \int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{1 + t^3}} \, dt < \ln b - \ln a$$

7 - Mostrar que $\forall x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1 + t^2} \, dt$$

8 - Sendo $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, calcular

$$\lim_{x \to 0} \int_0^1 f(xt) \, dt$$

9 - Calcular, sem primitivar,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx$$

Sugestão: recordar que $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ e fazer uma mudança de variáveis.

10 - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica de período T (isto é $f(x+T) = f(x)$, $\forall x$). Mostrar que

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

11 - a) Recordar que $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$ e concluir que $\forall k, m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(mt)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos(kt)\cos(mt)\,dt$$

b) Usando integração por partes no primeiro integral, calcular o seu valor.

c) Aplicar a mesma ideia ao cálculo de

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(mt)\,dt$$

12 - Calcular a área da região do plano limitada pelas curvas dadas:

a) $x = \frac{\pi}{2}$, $\quad x = \pi$, $\quad y = x\cos x \quad$ e $\quad y = 1 - \sin x$

b) $x = \frac{1}{2}$, $\quad x = 1$, $\quad y = \sqrt{2} \quad$ e $\quad y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

c) $y = 0$, $\quad y = \frac{x}{e} \quad$ e $\quad y = \ln x$

d) $y = x$, $\quad y = \frac{x}{4} \quad$ e $\quad y = x^3$

e) $y = x^3 + x \quad$ e $\quad y = x^5 - 2x^3 - 3x$

13 - Calcular a área das regiões:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 2 \ \wedge \ 0 < y < \min\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 4 \ \wedge \ |x| + |y| > 4\}$$