

Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 7

1 - Calcule os volumes dos sólidos gerados pela revolução, em torno do eixo $y = 0$ e do eixo $x = 0$ da região do plano limitada pelas curvas seguintes:

a) $y = 0$, $y = \sqrt{x+1}$ e $y = \sqrt{2x}$.

b) $y = 1$, $xy = 2$, e $x = y$.

2 - Calcule o volume do toro gerado pela revolução em torno do eixo $x = 0$ do círculo de raio a e centro no ponto de coordenadas $(a+b, 0)$ com $a, b \in \mathbb{R}^+$.

3 - Calcule o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo $y = 0$, do conjunto dos pontos cuja distância a esse eixo é maior do que a distância ao ponto $(1, 1)$ mas menor do que a distância ao ponto $(1, 4)$.

4 - Calcule o comprimento das curvas determinadas pelas seguintes equações:

a) $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$, $2 < x < 3$.

b) $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $0 < y < 1$.

5 - Calcule o limite, quando $a \rightarrow -1^+$, do comprimento do gráfico da função

$$f(x) = 2 \int_{\frac{1+x}{2}}^{1/2} \sqrt{\frac{1}{t} - 2} dt$$

no intervalo $]a, 0[$.

6 - Mostre que o integral impróprio

$$\int_0^1 (-\ln t)^n dt$$

converge para todo o $n \in \mathbb{N}$ e calcule o seu valor.

7 - Dadas constantes $0 < a < b$, determine a natureza (convergente ou divergente) dos seguintes integrais impróprios

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^a - 1}} dt \quad \int_1^{+\infty} t^a \sin \frac{1}{t^b} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$$

8 - Para $\alpha > 0$, calcule o volume (finito ou infinito) dos sólidos gerados por revolução em torno do eixo $y = 0$ das regiões

$$A_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < \frac{1}{x^\alpha}\}$$

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \wedge 0 < y < \frac{1}{x^\alpha}\}$$

9 - Mostre que a função

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

está definida para $x > 0$ e que, para $x > 1$

$$\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$$