

# Cálculo Diferencial e Integral I

## Exercícios 8

1 - a) Determinar os polinómios de Taylor de ordem 10, relativos ao ponto 0, das funções  $\cosh(x)$  e  $\sinh(x)$ .

b) Determinar o polinómio de Taylor de ordem 10, relativo ao ponto  $\pi/3$ , de  $\sin(x)$ .

2 - Determinar o polinómio  $p(x)$  de grau menor possível que satisfaz a condição

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x) - p(x)}{x^5} = 0$$

3 - Calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sinh(x) - \sin(x^2)}{x^6}$$

4 - Determinar as constantes  $a$  e  $b$  de modo a que

$$\cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

seja um infinitésimo da maior ordem possível.

5 - Mostrar que o polinómio

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

aproxima  $\sqrt{1+x}$  com erro inferior a  $\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}}$ , se  $|x| < \frac{1}{2}$ .

6 - Calcular o polinómio de Taylor de ordem 5 relativo ao ponto 1 da função  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

7 - Calcular as derivadas de ordem 8, 9 e 10 no ponto 0 da função  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ .

8 - Usando a fórmula de Taylor, calcular as constantes  $A_i$  e  $B_i$  na igualdade seguinte

$$\frac{x}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Sugestão: multiplicar ambos os membros da equação por  $(x-2)^3$  num caso e por  $(x+1)^2$  no outro.

9 - Calcular, com erro inferior a  $10^{-3}$ , os integrais

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \quad \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

10 - Calcular o polinómio de Taylor de ordem 5, relativo ao ponto 1, de  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

11 - Determinar a série de Taylor, relativa ao ponto indicado, das funções:

$$\arctan(x^2) \quad x_0 = 0; \quad x^3 + \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} \quad x_0 = 0; \quad \frac{1}{(1+x)^2} \quad x_0 = 0$$

$$x^2 \ln(3+2x^2) \quad x_0 = 0; \quad \sqrt{1-2x} \quad x_0 = 0$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad x_0 = 1$$

12 - Determinar o raio e intervalo de convergência das séries de potências

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3} (x-1)^k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2 + (-1)^k)^k x^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k}}{2^k k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \left(\frac{2x+1}{x}\right)^k \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

13 - Determinar o intervalo de convergência e a soma de cada uma das séries de potências seguintes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (k+1)x^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)x^k}{k!} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k}$$