Cálculo Diferencial e Integral I

Trigonometria - Revisão

1 - A primeira imagem no ficheiro anexo representa, numa circunferência de raio 1, a definição geométrica das funções seno, coseno, tangente e cosecante de um arco $0 < \alpha < \pi/2$ (ou do ângulo respectivo).
Rever essas definições e deduzir as definições de cotangente e secante do mesmo arco.

2 - Deduzir geometricamente as igualdades

$$\sin^2(\alpha) + \cos 2(\alpha) = 1;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha);$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha); \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha);$$

3 - Usando as igualdades de 2, deduzir

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha) && \sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha) \\ &\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) && \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \\ &\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) && \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) \\ &\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) && \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$

4 - Recordar os gráficos das funções seno, coseno e tangente. As restrições das funções $\sin(x)$ e $\tan(x)$ ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ são injectivas, e portanto existem as funções inversas, que se chamam respectivamente $\arcsin(y)$ e $\arctan(y)$. Esboçar os seus gráficos.
A restrição da função $\cos(x)$ ao intervalo $]0, \pi[$ é igualmente injectiva e a sua inversa designa-se $\arccos(y)$. Esboçar o seu gráfico.

5 - Deduzir, usando a segunda imagem no ficheiro anexo, a fórmula

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

no caso em que α, β e $\alpha+\beta$ pertencem ao intervalo $]0,\pi/2[$.
Nota: prova-se, usando as fórmulas dos exercícios 2 e 3, que esta fórmula é válida para quaisquer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

6 - Deduzir, a partir da fórmula do exercício anterior e das igualdades dos exercícios 2, as fórmulas

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

e

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

7 - Recordar o caso especial $\alpha=\beta$ nas fórmulas dos exercícios anteriores e mostrar que

$$\sin(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan 2(\alpha)},\qquad \cos(2\alpha)=\frac{1-\tan 2(\alpha)}{1+\tan 2(\alpha)}.$$

8 - Calcular $\sin(\frac{5\pi}{12})$ e $\cos(\frac{\pi}{12})$, usando os valores conhecidos destas funções em $\pi/4$ e $\pi/6$.

9 - Confirmar que

$$\begin{cases} t=\frac{\alpha+\beta}{2}\\ s=\frac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=t+s\\ \beta=t-s\end{cases}$$

Deduzir, a partir das fórmulas do seno e do coseno da soma (exercícios 5 e 6)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)+\sin(\beta)&=2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin(\alpha)-\sin(\beta)&=2\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)+\cos(\beta)&=2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos(\alpha)-\cos(\beta)&=-2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}\tag{2}$$