1 Introdução à Combinatória Enumerativa: Princípios e conceitos elementares de contagem

A Combinatória Enumerativa trata do problema de contar os elementos de conjuntos finitos. Começamos por estabelecer alguma notação e obter os resultados básicos, em boa parte bem conhecidos de todos. De caminho, poem-se em evidência alguns princípios básicos presentes em operações de contagem e algumas das suas consequências.

Para indicar que X é um conjunto com n elementos (abreviadamente dizemos que X é um $n-$conjunto) escrevemos $|X| = n$. Recorde-se que designamos por $[n]$ o $n-$conjunto $\{0, 1, \cdots, n-1\}$. A notação $|X|$ designa sempre a cardinalidade do conjunto X.

1.1 Subconjuntos de $[n]$ e números binomiais

Como se viu já num exercício, o número de subconjuntos de X é igual ao número de funções com domínio X e contradomínio $\{0, 1\}$: a cada $Y \subset X$ fazemos corresponder a função

$$f : X \to \{0, 1\}; \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in Y \\ \\ 0 & \text{se } x \notin Y \end{cases}$$

É fácil verificar que esta correspondência é uma bijecção.

Ordenando os elementos de X, vemos que cada uma dessas funções pode ser identificada com uma lista de 0 e 1, de comprimento $m = |X|$, ou seja com uma **escolha ordenada, com repetição**, de m elementos de um conjunto de 2 elementos, e que portanto o número referido atrás é 2^m.

É de realçar a ideia presente neste raciocínio, e que reaparece constantemente na Combinatória Enumerativa, que pode ser enunciada como

Princípio da Identidade: podemos contar os elementos de um conjunto pondo-o em bijecção com outro conjunto.

Este ideia óbvia (a própria definição de cardinalidade de um conjunto assenta no conceito de bijecção entre conjuntos) revela-se muito útil, nomeadamente quando se trata de comparar a cardinalidade de dois conjuntos: para comparar o número de pessoas numa sala com o número de cadeiras, podemos contar os elementos de cada um dos conjuntos ou, em alternativa, dizer a todas as pessoas para se sentarem e observar o resultado...

O facto anterior generaliza-se:

Lema 1.1 *O número de* ***escolhas ordenadas, com repetição****, de k elementos a partir de um $n-$conjunto é n^k.*

Nota 1.2 *Quando se fala de escolhas com repetição, isso significa que é* possível *repetir, e não que é obrigatório fazê-lo.*

Por outro lado, podemos ordenar n elementos de $n!$ maneiras. Mais geralmente,

Lema 1.3 *O número de* ***escolhas ordenadas, sem repetição****, de k elementos a partir de um $n-$conjunto é $\frac{n!}{(n-k)!}$. Este número designa-se também por $n^{\underline{k}}$.*

As operações de contagem são melhor compreendidas se, como faremos sistematicamente neste texto, as concretizamos como escolhas, ordenações ou distribuições de certos objectos bem definidos.
Por outro lado, uma forma de uniformizar num conceito comum essas operações

de contagem é identificá-las com funções entre conjuntos finitos: por exemplo, uma escolha ordenada, com repetição, de k elementos a partir de um $n-$conjunto, pode ser vista como uma função

$$f : [k] \to [n];$$

por outro lado, uma escolha ordenada, sem repetição, de k elementos a partir de um $n-$conjunto, pode ser identificada com uma função *injectiva*

$$f : [k] \to [n].$$

Designamos por $\binom{n}{k}$ o número de $k-$subconjuntos de um $n-$conjunto, ou seja o número de **escolhas não ordenadas, sem repetição**, de k elementos de um $n-$conjunto.

Se multiplicarmos cada uma dessas escolhas pelo número de maneiras de a ordenar, obtemos naturalmente o número de escolhas ordenadas, sem repetição, ou seja

$$k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

e portanto, como é bem sabido,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Algumas propriedades dos números binomiais $\binom{n}{k}$ podem ser facilmente deduzidas quer da fórmula algébrica anterior quer de argumentos combinatórios:

Lema 1.4 *1.* $k > n \vee k < 0 \implies \binom{n}{k} = 0$; $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$*;*

3. $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$*;*

Demonstração 1.5 *A segunda igualdade, por exemplo, pode ser provada considerando um* $n-$*conjunto* X *e um elemento* $a \in X$*; existem* $\binom{n-1}{k}$ $k-$*subconjuntos de* $X \setminus \{a\}$*; por outro lado a cada* $k-$*subconjunto de* X *que contém a corresponde um e um só* $(k-1)-$*subconjunto de* $X \setminus \{a\}$*, e existem portanto* $\binom{n-1}{k-1}$ $k-$*subconjuntos de* X *que contém a.*
Como cada $k-$*subconjunto de* X *ou contém a ou não contém a temos a igualdade 2.*

Do mesmo modo a igualdade 3 deriva de notarmos que o conjunto de todos os subconjuntos de X *se pode decompor na união disjunta dos conjuntos de* $k-$*subconjuntos de* X*.*

Aproveitamos para realçar a ideia elementar usada no raciocínio anterior, e que podemos enunciar como

Princípio da Adição: o número de elementos de uma união disjunta de conjuntos (finitos) é a soma dos números de elementos de cada conjunto.

Analogamente podemos enunciar um

Princípio da Multiplicação: se uma escolha pode ser feita atravées de duas escolhas sucessivas e independentes entre si, então o número dessas escolhas é o produto dos números de escolhas parciais (ou seja, o produto de um $n-$conjunto com um $m-$conjunto tem $n \times m$ elementos).

Exemplo 1.6 *Quantos subconjuntos de* $[50]$ *com* 7 *elementos (ou abreviadamente, quantos* $7-$*subconjuntos de* $[50]$*) contêm exactamente* 3 *números primos? Uma vez que há* 15 *primos menores que* 50*, a resposta é* $\binom{15}{3}\binom{35}{4}$.

Um terceiro princípio elementar é o

Princípio da Dupla Contagem que se limita a enunciar o facto evidente de que se contarmos de duas maneiras diferentes os elementos de um conjunto obtemos o mesmo resultado.

Apesar da sua simplicidade, estes princípios revelam-se muito úteis e permitem nomeadamente deduzir igualdades envolvendo coeficientes binomiais:

Exemplo 1.7 *Suponhamos que temos um $n-$conjunto X e um $m-$conjunto Y, disjuntos; quantos $k-$subconjuntos tem a união $X \cup Y$? Por um lado a resposta é obviamente $\binom{n+m}{k}$. Por outro, notamos que podemos obter cada $k-$subconjunto de $X \cup Y$ como a união de um $j-$subconjunto de X com um $(k-j)-$subconjunto de Y, para algum $0 \leq j \leq k$. Concluímos que*

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}$$

Exemplo 1.8 *Dados $l \leq k \leq n$, de quantas maneiras podemos escolher um $l-$subconjunto de um $k-$subconjunto de $[n]$? Por outras palavras, queremos saber quantos pares (X, Y) existem satisfazendo*

$$X \subset Y \subset [n] \qquad |X| = l; \qquad |Y| = k$$

Por um lado esse número pode ser calculado como

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l}$$

que corresponde a escolher um $k-$subconjunto de $\binom{n}{k}$ maneiras possíveis e depois escolher um $l-$subconjunto daquele.

Por outro, podemos começar por escolher um $l-$subconjunto de $\binom{n}{l}$ maneiras e depois um $(k-l)-$subconjunto no seu complementar em $[n]$ e temos portanto a igualdade

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$$

Se somarmos na variável k (com l fixo) estamos a calcular o número de pares (X, Y) tais que

$$X \subset Y \subset [n]; \qquad |X| = l$$

e obtemos

$$\sum_{k=l}^{n}\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{l}\sum_{k=l}^{n}\binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{l}\sum_{j=0}^{n-l}\binom{n-l}{j} = \binom{n}{l}2^{n-l}$$

Recorde-se que se verifica a seguinte igualdade:

Teorema 1.9 ***Binómio de NEWTON:***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Esta igualdade, já provada por indução em n, pode ser também justificada do seguinte modo: ao desenvolver o produto de n factores $(a+b)$ cada ocorrência do monómio $a^{n-k}b^k$ é o resultado de multiplicar a parcela b de k desses factores pela parcela a dos restantes e portanto aquele termo ocorre tantas vezes quantos os $k-$subconjuntos de $[n]$.

A partir da fórmula do binómio podemos deduzir

i) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$

ii) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$

Combinada com argumentos combinatórios a fórmula do binómio permite igualmente deduzir outras igualdades:

Exemplo 1.10 *Para todo o $n > 0$ tem-se*

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Esta igualdade pode ser deduzida derivando em ordem a x a igualdade

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

para obter

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

e fazer $x = 1$.

Note-se que a mesma igualdade podia também ser provada notando que ambos os lados contam, de maneiras diferentes, o número de maneiras de escolher um subconjunto de $[n]$ e um elemento desse subconjunto.

Outras fórmulas relacionadas com números binomiais são deduzidas nos exercícios.

Exercícios VI.1

1. Quantos 10-subconjuntos de $[30] = \{0, 1, \cdots, 29\}$ contêm (pelo menos) um elemento maior que 20?
2. Um exame consiste em 20 perguntas de escolha múltipla com 4 opções cada; nas primeiras 10 uma e só uma das respostas está certa, enquanto que nas restantes pode haver mais do que uma resposta certa, devendo o aluno assinalar todas as opções que considerar correctas. De quantas maneiras é possível responder ao exame?

3. Num totoloto em que são sorteados 6 números de $\{1, 2, \cdots, 50\}$, qual a probabilidade de sairem 3 números pares e 3 ímpares? Fazendo uma aposta com 7 números, qual a probabilidade de acertar em pelo menos 3?

4. Temos 9 subconjuntos diferentes de $[12]$, cada um com 8 elementos, e cada elemento de $[12]$ pertence exactamente a um mesmo número r daqueles subconjuntos. Qual o valor de r?

5. Dado N, quantos divisores tem, em média, um natural $1 \leq n \leq N$?
   Sugestão: Contar de duas maneiras as entradas não nulas de uma tabela $N \times N$ em que a entrada (i, j) é 1 se $i \mid j$ e 0 caso contrário.

6. Mostrar que

   a) se $m, n \in \mathbb{N}$ são primos entre si, então m divide o coeficiente binomial $\binom{m}{n}$.

   Sugestão: verificar primeiro que $\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$.

   b) $n + 1$ divide $\binom{2n}{n}$.

   c) se p é primo então $p \mid \binom{p}{k}$ $\forall k \in \{1, \cdots p-1\}$.

7. Dados inteiros positivos $m < n$, mostrar que se verifica
$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$
   Sugestão: Interpretando o lado direito como o número de maneiras de escolher $m + 1$ inteiros no conjunto $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, podemos separar essas escolhas em função do maior inteiro escolhido.

8. Demonstrar a identidade
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

9. Quantos caminhos existem com início no ponto $(0,0)$ e fim no ponto $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se em cada passo vamos de (u,v) para $(u+1,v)$ ou para $(u,v+1)$?

10. Demonstrar a identidade

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{k} = \binom{m+n}{n}$$

Sugestão: podemos classificar os caminhos do problema anterior em função do ponto de chegada à recta $x = m$.

11. De quantas maneiras podemos ordenar os elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ $(n > 3)$ de modo a que o 1 fique antes do 2 e o 3 antes do 4?

12. Seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de $[n]$ tal que se A e B são elementos de $\mathcal{A}$, então

$$A \cap B \neq \emptyset$$

. Qual o maior número possível de elementos que $\mathcal{A}$ pode ter?
Sugestão: Se A pertence a $\mathcal{A}$ então $[n] \setminus A$ não pertence.

13. Quantos pares de conjuntos (X,Y) existem tais que $X \subset Y \subset [n]$?

1.2 Escolhas com e sem ordem, com e sem repetição

Deduzimos já as fórmulas que nos dão o número de escolhas de k elementos de um $n-$conjunto

com ordem e sem repetição: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$;

com ordem e com repetição: n^k;

sem ordem e sem repetição: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

Deduzimos agora uma fórmula para o número de escolhas de k elementos de um $n-$conjunto, sem ordem e com repetição. Uma situação que ilustra este tipo de escolha é a de distribuir k bolas iguais por n caixas diferentes: neste caso o nosso $n-$conjunto é o conjunto das caixas e cada bola corresponde a uma escolha.
Podemos visualizar essa distribuição de forma diferente: imaginemos que temos as k bolas alinhadas e as separamos em blocos correspondendo às caixas; como queremos ficar com n blocos precisamos de intercalar na fila de bolas $n-1$ separadores. Note-se que é perfeitamente possível que algumas das caixas fiquem vazias e portanto que haja separadores em posições consecutivas (sem bolas entre eles).
Verificamos então que fazer uma distribuição equivale a escolher $n-1$ posições numa fila de comprimento $k+n-1$; ora o número dessas escolhas é já conhecido: $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Exemplo 1.11 *Quantas soluções existem para $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ com $x_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq n$? É o mesmo problema, uma vez que estamos a distribuir k unidades (as bolas) por n variáveis (as caixas); portanto a resposta é $\binom{n+k-1}{k}$.*

E quantas soluções existem com $x_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$? Por outras palavras, quantas escolhas de k elementos, não ordenadas e com repetição, podemos fazer num $n-$conjunto, na condição de cada elemento do conjunto ser escolhido pelo menos uma vez?

Se $k < n$ a resposta é evidentemente 0. Caso contrário, podemos resolver o problema, na descrição de bolas em caixas, colocando uma bola em cada caixa e distribuindo depois as $k-n$ restantes, o que, de acordo com a dedução anterior, pode ser feito de $\binom{n+(k-n)-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$ maneiras.

Temos, portanto, as seguintes fórmulas para os números de escolhas de k elementos de um $n-$conjunto:

	c/ repet.	s/ repet
c/ ordem	n^k	$n^{\underline{k}}$
s/ ordem	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

1.2.1 Multiconjuntos

Tal como uma escolha, não ordenada e sem repetição, de k elementos de um $n-$conjunto X nos dá um subconjunto com k elementos de X, podemos identificar uma escolha não ordenada e com repetição com um *multiconjunto* com elementos de X. Informalmente, um multiconjunto é apenas um conjunto com elementos repetidos; por exemplo, $\{1, 1, 2, 2, 2, 4\}$ é um multiconjunto com elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Mais formalmente, tal como um subconjunto de X se identifica com uma função $f : X \to \{0, 1\}$, podemos identificar um multiconjunto com uma função $f : X \to \mathbb{N}$ em que $f(x)$ nos dá o número de ocorrências de x no multiconjunto. Se

$$\sum_{x \in X} f(x) = k$$

dizemos que f define um $k-$multiconjunto com elementos de X.

Temos portanto que o número de $k-$multiconjuntos com elementos de $[n]$ é $\binom{n+k-1}{k}$, facto que pode ser também deduzido do seguinte modo: um $k-$multiconjunto com elementos em $[n]$ corresponde a uma sucessão (a_i) (em que $1 \leq i \leq k$) satisfazendo

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n;$$

Associamos a (a_i) o $k-$subconjunto de $[n + k - 1]$

$$\{a_1, a_2 + 1, \cdots, a_k + k - 1\}.$$

Resta verificar que temos uma bijecção entre os $k-$multiconjuntos com elementos em $[n]$ e os $k-$subconjuntos de $[n+k-1]$.

1.2.2 Números multinomiais

$\binom{n}{k}$ é o número de maneiras de repartir um $n-$conjunto X em dois subconjuntos X_1 e X_2, o primeiro com k e o segundo com $n-k$ elementos.
Note-se a distinção entre os dois subconjuntos que é necessária quando $n = 2k$. Por exemplo, se $X = \{a, b, c, d\}$, as partições

$$X_1 = \{a, b\}, X_2 = \{c, d\}$$

e

$$X_1 = \{c, d\}, X_2 = \{a, b\}$$

são contadas como diferentes.

Generalizando, de quantas maneiras podemos repartir os elementos de X em subconjuntos $X_1, \cdots, X_r$ de modo a que $|X_i| = k_i$?
Podemos escolher os elementos de X_1 de $\binom{n}{k_1}$ maneiras, em seguida os de X_2 de $\binom{n-k_1}{k_2}$ maneiras e assim por diante. Deduzimos que a resposta é o número multinomial

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

Note-se mais uma vez que a ordem dos conjuntos X_i é tida em linha de conta.

Uma outra interpretação e aplicação dos números multinomiais é a seguinte: seja X um $n-$multiconjunto com elementos em $[r]$ contendo k_i "cópias" do elemento i, ou seja, usando a identificação feita anteriormente, X é identificado com a função

$$f : [r] \to \mathbb{N},\ f(i) = k_i,\ \text{ onde } \sum_{i=0}^{r-1} k_i = n.$$

Então $\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r}$ pode ser interpretado como o número de maneiras de ordenar o conjunto X.

Exemplo 1.12 *De quantas maneiras podemos dividir* 25 *pessoas por duas equipas de* 7*, uma de* 6 *e outra de* 5 *para trabalharem em quatro projectos diferentes? A resposta é*

$$\binom{25}{5, 6, 7, 7} = \frac{25!}{5!6!7!7!}$$

No entanto, se as equipas forem trabalhar todas no mesmo projecto a resposta passa a ser $\frac{1}{2}\binom{25}{5, 6, 7, 7}$ *uma vez que é indiferente a ordem por que consideramos os dois grupos de* 7 *pessoas.*

Exemplo 1.13 *De quantas maneiras podemos ordenar* 7 *bolas azuis,* 6 *bolas brancas e* 5 *bolas verdes?*
Numa fila com 18 *lugares, escolhemos as* 7 *posições das bolas azuis de* $\binom{18}{7}$ *modos possíveis e em seguida escolhemos de entre as* 11 *posições vagas, as* 6 *das bolas brancas de* $\binom{11}{6}$ *modos possíveis. O resultado é que há*

$$\binom{18}{7}\binom{11}{6} = \frac{18!}{7!6!5!} = \binom{18}{7, 6, 5}$$

ordens possíveis.

Note-se que se tivermos 7 *bolas azuis,* 6 *bolas brancas e* 6 *bolas verdes para ordenar, o resultado é* $\binom{19}{7, 6, 6}$*, e não* $\frac{1}{2}\binom{19}{7, 6, 6}$.

Tal como no caso dos números binomiais, os números multinomiais podem ser gerados pela expansão algébrica de um polinómio em r variáveis:

Teorema 1.14

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$$

em que

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

e a soma é feita sobre todos os valores (não negativos) de $k_1, k_2, \cdots, k_r$*, tais que*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

1.3 Princípio do Pombal

Até aqui considerámos apenas problemas de contagem. Existe um tipo diferente de problemas em que o que está em causa é determinar qual é o número mínimo de elementos que um conjunto tem que ter para que certa propriedade se verifique. O exemplo mais elementar que se pode dar é o seguinte:
suponhamos que queremos distribuir n bolas por k caixas e queremos garantir que pelo menos uma das caixas fica com mais do que uma bola. Evidentemente, a condição para que isso aconteça é que $n > k$.
Dito de outro modo, temos o seguinte

Princípio do Pombal: Se X e Y são conjuntos **finitos** e $|X| > |Y|$, então não existe qualquer função $f : X \to Y$ **injectiva**.
Mais geralmente, se $f : X \to Y$ e $|X| > k|Y|$, então existe algum $y \in Y$ tal que $|f^{-1}(y)| > k$.

Apesar da sua simplicidade, este princípio tem aplicações inesperadas.

Exemplo 1.15 *Dados 5 pontos do plano com coordenadas inteiras, existe pelo menos um par deles para o qual o segmento de recta que os une contém outro ponto de coordenadas inteiras.*

Se os 5 pontos têm coordenadas (x_i, y_i) *(com* $1 \leq i \leq 5$*) e considerarmos os pares ordenados*

$$(x_i \mod 2, y_i \mod 2)$$

verificamos imediatamente que, uma vez que só há quatro resultados possíveis, existem índices $i \neq j$ *para os quais*

$$x_i \equiv x_j \mod 2 \qquad y_i \equiv y_j \mod 2$$

e então o ponto médio desses dois pontos

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$$

terá coordenadas inteiras.

Os dois exemplos que se seguem são mais complicados.

Exemplo 1.16 *Dado* n*, seja* $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ *uma sucessão de números diferentes entre si. Então existe uma subsucessão monótona de comprimento* $n+1$*.*

Para verificar que é de facto assim, chamemos b_i *ao comprimento da maior subsucessão decrescente com último termo* a_i*; se* $b_i \geq n+1$ *para algum* i*, não há nada a demonstrar; caso contrário, tem que haver* $n+1$ *valores iguais, ou seja existem* $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}}$ *termos (com* $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$*) tais que a maior subsucessão decrescente terminando em qualquer deles tem comprimento* b*. Mas então concluímos que*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{n+1}}$$

(porque, se $a_{i_j} > a_{i_{j+1}}$*, como existe uma subsucessão decrescente de comprimento* b *com último termo* a_{i_j}*, acrescentando-lhe* $a_{i_{j+1}}$ *obtemos uma subsucessão decrescente, de comprimento* $b+1$*, com último termo* $a_{i_{j+1}}$*) e temos portanto uma subsucessão crescente de comprimento* $n+1$*.*

Exemplo 1.17 *Este exemplo envolve uma aplicação do princípio do pombal a uma área diferente: dado um irracional α, é claro que existem racionais tão próximos de α quanto desejarmos, mas para obtermos aproximações cada vez melhores temos que escolher racionais com denominador cada vez maior; mais precisamente, se fixarmos um natural Q e considerarmos o conjunto dos racionais com denominador menor ou igual a Q, existe um, e um só, deles que está a uma distância mínima $d(Q)$ de α. Portanto, se quisermos uma aproximação racional de α com erro inferior a $d(Q)$ temos que usar racionais com denominador maior que Q.*
Como a distância entre dois racionais consecutivos com denominador menor ou igual a Q é sempre menor ou igual a $1/Q$, vemos que $d(Q) < 1/(2Q)$ e portanto para obter uma aproximação racional de α com erro inferior a δ, podemos escolher entre os racionais com denominador menor ou igual a Q com $Q > 1/(2\delta)$.

O resultado seguinte diz-nos que de facto podemos obter uma aproximação p/q com erro inferior a δ desde que $q > \sqrt{1/\delta}$. Assim, enquanto que pelo raciocínio anterior, para garantir uma aproximação com erro inferior a 10^{-4} teríamos que considerar racionais com denominador até 5000, o teorema seguinte garante a existência de uma aproximação dessa ordem com denominador menor ou igual a 100.

Teorema *1.18* *Se α é irracional e $Q \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um racional p/q com $1 \leq q \leq Q$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$$

Demonstração *1.19* *Podemos evidentemente supôr que α está no intervalo $[0, 1]$. Considerem-se as partes fraccionárias dos $Q + 1$ números*

$$\alpha, 2\alpha, \cdots, (Q + 1)\alpha$$

Se dividirmos o intervalo $[0, 1]$ nos n subintervalos

$$[0, 1/Q], [1/Q, 2/Q], \cdots, [(Q - 1)/Q, 1]$$

concluímos que existem duas daquelas partes fraccionárias que ficam no mesmo subintervalo; concretamente, existem $1 \leq q_1 < q_2 \leq Q+1$ *e inteiros* p_1 *e* p_2 *(que são as partes inteiras, respectivamente, de* $q_1\alpha$ *e* $q_2\alpha$*) tais que*

$$| (q_2\alpha - p_2) - (q_1\alpha - p_1) | < 1/Q$$

Designando $q = q_2 - q_1$ *e* $p = p_2 - p_1$*, obtemos*

$$|q\alpha - p| < 1/Q \Rightarrow |\alpha - p/q| < 1/(qQ)$$

e como $q \leq Q$ *temos a desigualdade final.*

Exercícios VI 2.

1. Dados inteiros positivos $k < N$, determinar o número de soluções com $x_i \geq 0$ de
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k < N$$
2. De quantas maneiras podemos distribuir 20 bolas idênticas por 8 caixas diferentes $C_1, C_2, \cdots, C_8$,
   a) com a condição de nenhuma caixa ficar vazia?
   b) com a condição de nenhuma caixa ter mais do que 12 bolas?
   c) com a condição das caixas C_1 e C_2 terem o mesmo número de bolas?
3. De quantas maneiras podemos distribuir 20 bolas iguais e outras 8 bolas numeradas por 10 caixas diferentes?
4. De quantas maneiras se podem seleccionar 5 números no conjunto $\{1, 2, \cdots, 30\}$ de modo a que o valor absoluto da diferença entre quaisquer dois deles seja pelo menos 3?
5. De quantas maneiras se podem distribuir 151 bolas iguais por 5 caixas diferentes de modo a que nenhuma caixa tenha mais bolas do que a união das outras?
6. De quantas maneiras podemos distribuir $2n$ pessoas por duas mesas redondas iguais com n lugares cada?

7. De quantas maneiras podemos seleccionar k pessoas numa mesa redonda com n pessoas (e n lugares) de modo a nunca escolher pessoas que estejam sentadas lado a lado?
   Sugestão: Fixe-se uma pessoa X e divida-se o problema nos dois casos em que X é ou não seleccionado.

8. a) De quantas maneiras podemos escolher um conjunto de bolas de entre 7 bolas azuis, 9 bolas vermelhas e 10 bolas brancas?
   b) Dados conjuntos disjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_m$ tais que $|X_i| = k_i$, de quantas maneiras podemos escolher um subconjunto de
   $$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$$
   que não contenha mais do que um elemento de cada X_i?
   E se $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_m$?
   c) Se $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$ é a factorização de m em factores primos, quantos divisores tem m?

9. Qual o número de resultados possíveis quando se lançam três dados simultâneamente? Cada dado tem as faces todas diferentes mas os dados são todos iguais.

10. Quantas soluções em inteiros existem para o sistema
    $$0 < x < y < z < 25?$$

11. Distribuem-se 200 bolas por 100 caixas; nenhuma caixa fica vazia e nenhuma caixa contém mais que 100 bolas. Mostrar que é possível dividir as caixas em dois grupos de modo a que as caixas de cada grupo contêm ao todo 100 bolas.
    Sugestão Designando por x_i o número de bolas da caixa c_i, considerar as classes módulo 100 das somas
    $$s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

12. De quantas maneiras podemos organizar 18 pessoas em

a) três grupos de 5, 6 e 7 pessoas;

b) quatro grupos de 4, 4, 5 e 5 pessoas.

13. a) Quantos anagramas (ou seja, palavras obtidas por reordenação das letras) existem da palavra **BANANA**?

    b) Em quantos anagramas da palavra **MISSISSIPPI** é que os dois primeiros **I** aparecem antes do primeiro **S**?

    c) Quantos anagramas se podem formar da palavra **lauwiliwilinukunuku'oi'oi** se considerarmos que os apóstrofos " ' " não podem aparecer no início ou no fim nem podem ficar seguidos?

1.4 Distribuições, partições e funções

Deduziu-se já que o número de maneiras de fazer k escolhas, com (possível) repetição e sem ordem, num n-conjunto, é dado por $\binom{n+k-1}{k}$. Podemos também interpretá-lo, como vimos, como o número de modos de distribuir k bolas, todas iguais, por n caixas diferentes. Se as escolhas forem sem repetição, elas podem ser interpretadas igualmente como distribuições injectivas de bolas em caixas, ou seja, em que cada caixa não recebe mais do que uma bola.

Do mesmo modo, o número de maneiras de fazer k escolhas, com ordem (sem ou com repetição) num n-conjunto, pode ser identificado com o número de maneiras de distribuir (de forma injectiva ou não) k bolas distintas por n caixas distintas.

Esta analogia leva a que classifiquemos então diversos problemas de contagem com recurso a essa imagem concreta, de acordo com o quadro seguinte.

Distribuições ("bolas em caixas"):

		todas	injectivas	sobrejectivas
k bolas $\neq$	n caixas $\neq$	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n!S(k,n)$
k bolas $\neq$	n caixas $=$	$\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$	$\begin{array}{ll} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{array}$	$S(k,n)$
k bolas $=$	n caixas $\neq$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{k-n}$
k bolas $=$	n caixas $=$	$\sum_{i=1}^{n} p_i(k)$	$\begin{array}{ll} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{array}$	$p_n(k)$

$S(k,n)$ e $p_n(k)$ designam-se, respectivamente, **números de Stirling de segunda espécie** e números de partição.
A introdução destas novas notações para identificar operações de contagem sugere que esses números não se representam de forma simples à custa de outros já conhecidos, como os números binomiais ou multinomiais. Analisaremos a seguir mais em pormenor as propriedades mais imediatas destes números.
No fim desta secção, faremos a interpretação sistemática das várias entradas do quadro em termos de funções

$$f : [k] \to [n].$$

1.4.1 Partições de um conjunto e Números de Stirling de segunda espécie

Definição 1.20 : *Uma n-partição de um conjunto X é uma família de subconjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ não vazios tais que*

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$$

É evidente que cada distribuição sobrejectiva de k bolas distintas por n caixas iguais corresponde exactamente a uma n-partição de $[k]$ e reciprocamente, e portanto

Definição 1.21 : *O número de n-partições de um k-conjunto designa-se número de Stirling de segunda espécie $S(k, n)$.*

O número de distribuições de k bolas distintas por n caixas iguais, sem a restrição de não haver caixas vazias, é igual ao número de distribuições em que se usam j caixas com j a variar entre 1 e n, e é portanto igual a $\sum_{j=1}^{n} S(k, j)$. Obviamente, $S(k, n) = 0$ se $n > k$; $\sum_{i=1}^{k} S(k, i)$, que conta todas as partições de um $k-$conjunto, tem a designação de **Número de Bell** e a notação $Bell(k)$.

Alguns factos básicos:

Lema 1.22 *Se $k > 0$ e $n \leq 0$, $S(k, 0) = 0$; se $n > 0$ e $k \leq 0$, $S(0, n) = 0$; $S(0, 0) = 1$;*

$S(k, 1) = S(k, k) = 1$;

$S(k, k-1) = \binom{k}{2}$;

Para justificar a última igualdade, note-se que se temos uma partição de um k-conjunto em $k-1$ subconjuntos, um deles tem 2 elementos enquanto que todos os outros têm apenas 1. Portanto $S(k, k-1)$ é o número de maneiras de escolher os dois elementos que ficam juntos.

Nota 1.23 *O valor $S(0, 0) = 1$ (há uma única maneira de distribuir zero bolas por zero caixas que é não fazer nada...) pode ser justificado mais formalmente notando que existe uma única função $f : \emptyset \to \emptyset$, que é ela própria o conjunto vazio, e que essa função deve ser considerada sobrejectiva (não existe nenhum valor no contradomínio que ela não assuma!)*

Um resultado bem mais importante é a seguinte:

Proposição 1.24 *: Os números de Stirling de segunda espécie satisfazem a fórmula de recorrência*

$$S(k,n) = S(k-1,n-1) + nS(k-1,n), \ \forall k > 0, \forall n \leq k$$

Demonstração 1.25 *Deduzimos este resultado considerando um k-conjunto X, um elemento $x \in X$ e separando as n-partições de X em dois casos: se x fica sozinho num subconjunto, os restantes $k-1$ elementos têm que ser divididos por $n-1$ subconjuntos e existem portanto $S(k-1,n-1)$ partições em que x fica sozinho; por outro lado, fazer uma n-partição de X em que x não fica sozinho é o mesmo que fazer uma n-partição de $X \setminus x$, o que se pode fazer de $S(k-1,n)$ maneiras, e escolher depois em qual dos n subconjuntos fica x, o que nos dá a segunda parcela.*

Esta fórmula permite construir facilmente um quadro com os valores de $S(k,n)$ para valores pequenos das variáveis, semelhante ao triângulo de Pascal para os números binomiais:
na tabela abaixo, as linhas correspondem aos valores de k e as colunas aos de n; omitiram-se, para maior clareza de leitura, os valores 0 que ocorrem acima da diagonal.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Note-se que, tal como acontece nas linhas dos triângulo de Pascal, se excluirmos os valores nulos, cada linha começa e termina com $S(k,1) =$

$S(k,k)=1$ e é, além disso, uma sequência unimodal: é constituída por um segmento inicial crescente até atingir um valor máximo e por um segmento decrescente. No entanto, está ausente a simetria bem conhecida dos números binomiais: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Uma outra observação fundamental é

Proposição 1.26 : *O número de funções* sobrejectivas *de um k-conjunto num n-conjunto é dado por $n!S(k,n)$.*

Demonstração 1.27 : *Uma função $f : [k] \to [n]$ sobrejectiva determina uma n-partição de $[k]$*

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

em que

$$X_i = \{x \in [k] : f(x) = i\}$$

E duas funções sobrejectivas f e g dão lugar à mesma n-partição se houver uma bijecção $\sigma : [n] \to [n]$, tal que $g = \sigma \circ f$. Como existem $n!$ bijecções de $[n]$, temos a igualdade.

Usamos esta interpretação dos números de Stirling de segunda espécie para calcular $S(k,2)$ e $S(k,3)$:

Uma função sobrejectiva $f : [k] \to [2]$ fica completamente determinada pela escolha de um subconjunto $S \subset [k]$ não vazio e de complementar não vazio de modo a que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ \\ 1 & \text{se } x \in [k] \setminus S \end{cases}$$

Como há $2^k - 2$ subconjuntos S nessas condições, concluímos da proposição anterior que $S(k,2) = 2^{k-1} - 1$.

Para contar as funções sobrejectivas $f : [k] \to [3]$, podemos proceder contando as não sobrejectivas: existem 3 funções cuja imagem consiste num único elemento; para cada escolha de dois elementos em [3], existem, como vimos no caso anterior, $2^k - 2$ funções $f : [k] \to [3]$ cuja imagem consiste nesse dois elementos; como podemos escolher estes de $\binom{3}{2}$ maneiras, existem $\binom{3}{2}(2^k - 2)$ funções $f : [k] \to [3]$ cuja imagem conté exactamente dois elementos. Existem ao todo 3^k funções logo o número de funções sobrejectivas $f : [k] \to [3]$ é

$$3^k - 3 - \binom{3}{2}(2^k - 2)$$

e portanto

$$S(k,3) = \frac{3^{k-1} - 1}{2} - (2^{k-1} - 1)$$

É em princípio possível generalizar esta ideia e, para cada n, encontrar uma fórmula para $S(k,n)$. No entanto não temos uma fórmula fechada (ou seja sem recorrências), dependente apenas de k e n.
O melhor que podemos obter é uma fórmula que nos dá $S(k,n)$ como um somatório. Essa fórmula será deduzida como aplicação de um dos princípios fundamentais da combinatória enumerativa, o Princípio da Inclusão-Exclusão.

1.4.2 Partições de um número

Designamos por $p_n(k)$ o número de maneiras de distribuir k bolas iguais por n caixas, também iguais entre si, sem deixar qualquer caixa vazia.

Uma vez que no caso da quarta linha do quadro, não há distinção entre bolas nem entre caixas, cada distribuição sobrejectiva é totalmente caracterizada pelos números de bolas das diversa caixas, não interessando a ordem destas. Podemos então colocar estes n números positivos, cuja soma é k, por uma ordem (por exemplo, não decrescente) e concluir que $p_n(k)$ é o número de soluções em inteiros de

$$x_1 + \cdots x_n = k, \qquad x_i > 0, \qquad x_1 \leq \cdots \leq x_n$$

ou seja, do seguinte sistema de uma equação e n inequações

$$\begin{cases} x_1 + \cdots x_n = k \\ 0 < x_1 \\ x_1 \leq x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \leq x_n \end{cases}$$

Portanto, $p_n(k)$ é o número de partições não ordenadas de k em parcelas positivas. E exactamente porque não nos interessa a ordem, podemos representá-las sempre em ordem não decrescente.
Temos, por exemplo, $p_3(7) = 4$, notando que as soluções nesse caso são

$$\begin{array}{c} 1+1+5 \\ 1+2+4 \\ 1+3+3 \\ 2+2+3 \end{array}$$

Apesar da equação

$$x_1 + \cdots x_n = k, \qquad x_i > 0$$

ter sido resolvida no caso geral de forma muito simples, não existe para $p_n(k)$ uma fórmula com grau de simplicidade sequer comparável.
Alguns factos de verificação imediata a partir da definição:

Lema 1.28 *1. se $k < n$ então $p_n(k) = 0$ (aplicando o princípio do Pombal);*

2. $p_1(k) = 1$ para todo o $k > 0$;

3. $p_k(k) = p_{k-1}(k) = 1$ *para todo o* $k > 0$*.*

Definimos igualmente $p(k) = \sum_{n=1}^{k} p_n(k)$.

Tal como para os números de Stirling de segunda espécie, é possível determinar sem dificuldade fórmulas para mais algumas famílias de casos (por exemplo, para $p_2(k)$). E podemos estabelecer igualmente uma fórmula de recorrência:
para isso, começamos por separar as partições de k em n parcelas em dois subconjuntos: aquelas em que a menor parcela é 1 e aquelas em que não é. Cada partição no primeiro caso corresponde a uma partição de $k-1$ em $n-1$ parcelas, obtida simplesmente por eliminação da primeira; e reciprocamente, cada partição de $k-1$ em $n-1$ parcelas corresponde de forma única a uma partição de k em n parcelas com a primeira igual a 1:

$$k = 1 + x_2 + \cdots + x_n \leftrightarrow k - 1 = x_2 + \cdots + x_n$$

No segundo caso, se subtrairmos uma unidade a cada parcela ficamos com uma partição de $k-n$ em n parcelas; e reciprocamente, dada uma partição qualquer de $k-n$ em n parcelas, somando 1 a cada parcela ficamos com uma partição de k em n parcelas todas maiores que 1:

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \, (x_1 > 1) \leftrightarrow k - n = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_n - 1)$$

Estas duas bijecções provam a seguinte

Proposição 1.29 : *Pondo, por definição,* $p_n(k) = 0$ *para* $k \leq 0$ *ou* $n \leq 0$*, verifica-se a seguinte igualdade, para todo o* k *e todo o* n*:*

$$p_n(k) = p_{n-1}(k-1) + p_n(k-n).$$

Um instrumento útil para o estudo de partições de k é o dos **diagramas de Young**.
Um diagrama de Young é simplesmente um conjunto de linhas, cada uma constituída por um certo número finito de quadrados, alinhadas à esquerda,

e com a propriedade de que o número de quadrados por linha é não crescente, contados da primeira para a última.
É evidente que a cada partição de k corresponde um diagrama de Young com um total de k quadrados, e vice-versa; e os diagramas com k quadrados distribuídos por n linhas correspondem às partições de k em n parcelas. Esta identificação permite deduzir facilmente algumas propriedades, das quais damos apenas um exemplo, usando uma operação de reflexão nos diagramas: dado um diagrama, obtemos um novo diagrama trocando as linhas pelas colunas, isto é, a primeira coluna do diagrama original passa a ser a primeira linha do novo, e assim por diante.
Se aplicarmos esta reflexão a um diagrama com n linhas obtemos um cuja primeira linha tem n quadrados. Traduzindo em termos de partições:

Proposição 1.30 : *$p_n(k)$ é igual ao número de partições de k em que a maior parcela é n.*

Exercícios VI 3.

1. Mostrar que os números de Stirling de segunda espécie satisfazem a recorrência
$$S(k+1,n) = \sum_{j=n-1}^{k} \binom{k}{j} S(j, n-1)$$

2. Mostrar que, para todo o m,
$$m^k = \sum_{j=0}^{m} S(k,j) m^{\underline{j}}$$

   Sugestão: O lado esquerdo da igualdade representa o número de funções de $[k]$ em $[m]$. Classificar essas funções em função do número de elementos da sua imagem $A \subset [m]$.

3*. Mostrar por indução que para cada n a sequência $S(n,1), S(n,2), \cdots, S(n,n)$ é unimodal: existe $j(n)$ tal que

(a) $S(n, r-1) < S(n, r)$ se $1 < r \leq j(n)$;

(b) $S(n, j(n)) \geq S(n, j(n)+1)$;

(c) $S(n, r) > S(n, r+1)$ se $r > j(n)$;

(d) Além disso $j(n+1) = j(n)$ ou $j(n+1) = j(n) + 1$.

1.4.3 Distribuições e funções

Adaptando a linguagem das funções, dissemos que uma distribuição é injectiva se nenhuma caixa fica com mais que uma bola, e sobrejectiva se não ficam caixas vazias.
E chamou-se igualmente a atenção para o facto de que as distribuições com bolas diferentes por caixas distintas (primeira linha do quadro) se identificam exactamente com funções $f : [k] \to [n]$. Verificamos agora que os outros tipos de distribuições se podem por sua vez identificar com **classes de equivalência** daquelas funções.
Considere-se a segunda linha; se colocarmos provisoriamente etiquetas nas caixas temos de novo o caso da primeira linha; quando é que duas funções f e g se identificam ao retirarmos as etiquetas? Isso acontece se e só se existir uma bijecção $\pi : [n] \to [n]$ tal que $g = \pi \circ f$. É evidente que isto define uma relação de equivalência:

1. A relação é reflexiva: para toda a funccão $f : [k] \to [n]$, $f = \iota \circ f$, onde ι designa a bijecção identidade de $[n]$.
2. A relação é simétrica: se $g = \pi \circ f$ então $f = \pi^{-1} \circ g$.
3. A relação é transitiva: se $g = \pi \circ f$ e $h = \sigma \circ g$ então $h = (\sigma \circ \pi) \circ f$.

Note-se que se f e g são equivalentes por esta relação, g é injectiva se e só se f o for e o mesmo se passa quanto à sobrejectividade. Podemos portanto interpretar cada distribuição de k bolas distintas por n caixas iguais como uma classe de equivalência, para a relação definida acima, de funções de $[k]$ em $[n]$.

Do mesmo modo, as distribuições da terceira linha do quadro podem ser identificadas com classes de equivalência de funções, desta vez para a relação definida por: f e g são equivalentes se existe uma bijecção $\tau : [k] \to [k]$ tal que $g = f \circ \tau$.

E, finalmente, as distribuições da última linha identificam-se como classes de equivalência de funções para a relação definida por: f e g são equivalentes se existem bijecções

$$\pi : [n] \to [n], \qquad \tau : [k] \to [k]$$

tais que

$$g = \pi \circ f \circ \tau$$

Se soubéssemos compreender exactamente como estas diversas relações de equivalência identificam funções umas com as outras, poderíamos deduzir fórmulas para todas as linhas a partir das da primeira. Foi isso aliás que fizémos na dedução de $S(k, n)$ a partir do número de funções de $[k]$ em $[n]$ sobrejectivas; o que se passa nesse caso é que a primeira relação de equivalência junta exactamente $n!$ funções em cada classe de equivalência.
Infelizmente, a situação nos outros casos não é tão simples. Voltaremos a este problema de, dada uma certa relação de equivalência num conjunto, contar as classes de equivalência, noutro ponto do curso.