

## 1 Permutações e Simetrias

Dado  $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  (qualquer conjunto com  $n$  elementos pode ser identificado com este) consideramos o conjunto  $S_n$  de todas as bijecções  $f : [n] \rightarrow [n]$ , ou permutações de  $[n]$ .

Sabemos já que  $|S_n| = n!$ .

Uma permutação  $\pi$  pode ser representada indicando numa tabela os valores de  $\pi(x)$  para todos os  $x \in [n]$ . Por exemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo bijecções de um conjunto nele próprio, as permutações podem ser compostas umas com as outras, obtendo-se novas permutações. Por exemplo, se  $\pi$  é a permutação definida anteriormente e

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde  $\pi \circ \rho(x) = \pi(\rho(x))$ .

No que se segue, representaremos abreviadamente  $\pi \circ \rho$  por  $\pi\rho$ , não havendo perigo de confusão com outras operações. Em particular  $\pi \circ \pi = \pi^2$ , etc.

É importante notar que em geral a composição de permutações não é comutativa. Assim, por exemplo

$$\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por outro lado, essa operação é associativa

$$\pi(\rho\tau) = (\pi\rho)\tau, \quad \forall \pi, \rho, \tau \in S_n$$

existe um elemento neutro, a permutação identidade

$$\iota : [n] \rightarrow [n], \iota(x) = x, \forall x$$

e todo o elemento  $\pi \in S_n$  tem um inverso que representamos por  $\pi^{-1}$ . Por exemplo, para o exemplo acima

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto  $S_n$  é um conjunto fechado para uma operação associativa, existindo um elemento neutro e tal que todo o elemento tem um inverso. Este conjunto de propriedades resume-se dizendo que  $S_n$  munido da operação de composição é um **grupo**.

O grupo  $S_n$  tem uma representação matricial: a cada permutação  $\pi$  fazemos corresponder a matriz  $M_\pi$  com  $n$  linhas e  $n$  colunas definida por

$$M_\pi(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } \pi(j) = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(onde as linhas e colunas foram indexadas pelos elementos de  $[n]$  e não como habitualmente por  $1, \dots, n$ ).

Estas matrizes de permutação podem ser caracterizadas como as matrizes quadradas de dimensão  $n$  com entradas iguais a 0 ou 1 e que têm exactamente um 1 em cada linha e em cada coluna.

Como se verifica facilmente, a matriz  $M_\pi$  foi definida de modo a que se tenha

$$M_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

Deduz-se então que

$$M_{\pi \circ \rho} = M_\pi \cdot M_\rho$$

ou seja, a composição de permutações “traduz-se” no produto de matrizes.

## 1.1 Decomposição cíclica de permutações

Dado  $x \in [n]$ , a sucessão

$$x, \pi(x), \pi^2(x), \dots$$

onde  $\pi^2$  designa a composição  $\pi \circ \pi$  e do mesmo modo  $\pi^j$  a composição  $\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi$  ( $j$  vezes), chama-se a órbita de  $x$  pela permutação  $\pi$ . Como  $[n]$  é finito, qualquer órbita é também finita. Mais do que isso, como as permutações são bijecções, existe sempre um  $k \leq n$  tal que  $\pi^k(x) = x$  e portanto a órbita de  $x$  por  $\pi$  é um **ciclo**

$$(x, \pi(x), \dots, \pi^{k-1}(x))$$

Num ciclo não importa qual o elemento que representamos como primeiro, mas apenas a ordem em que elementos ocorrem; portanto, por exemplo,

$$(\pi(x), \dots, \pi^{k-1}(x), x)$$

representa o mesmo ciclo .

Dada  $\pi$  e  $x, y \in [n]$ , os ciclos de  $x$  e de  $y$  por  $\pi$  ou coincidem ou são disjuntos. Cada permutação tem portanto uma decomposição cíclica. Nos exemplos anteriores,

$$\pi = (0, 1, 3, 2, 4) \quad \rho = (0, 2)(1)(3, 4)$$

Note-se que na representação de  $\rho$  acima não importa também a ordem por que apresentamos os ciclos; podemos igualmente representar  $\rho = (3, 4)(1)(2, 0)$ . É também natural omitir os ciclos de comprimento 1, ou seja os elementos em que a permutação actua como a identidade.

Esta representação de uma permutação como composição de ciclos pode (e deve) ser interpretada do seguinte modo: cada ciclo é de facto uma permutação de  $[n]$  que actua como a identidade nos elementos que não pertencem ao ciclo, por exemplo, com  $n = 5$

$$(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e cada permutação se pode obter como composição dos seus ciclos de maneira única, a menos da ordem dos ciclos, já que ciclos disjuntos comutam entre si.

**Definição 1.1** *O tipo cíclico de uma permutação é a lista dos números de ciclos de cada comprimento. Representamos um tipo como  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  onde  $\alpha_i$  é o número de ciclos de comprimento  $i$ .*

Os coeficientes  $\alpha_k$  são não negativos e satisfazem a igualdade

$$\sum_{k=1}^n k\alpha_k = n,$$

uma vez que a união (disjunta) de todos os ciclos de uma permutação é todo o conjunto  $[n]$ , e reciprocamente qualquer solução  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , em inteiros não negativos, desta igualdade, corresponde a um tipo cíclico.

Portanto os tipos cíclicos de  $S_n$  estão em bijecção com as partições de  $n$  em parcelas positivas, e o número de tipos cíclicos é  $p(n)$ .

Duas permutações  $\pi$  e  $\rho$  dizem-se **conjugadas** se existe uma permutação  $\tau$  tal que

$$\tau\pi = \rho\tau$$

ou seja se representam a mesma transformação a menos de uma “mudança de variáveis”.

A relação de conjugação é uma relação de equivalência definida no grupo  $S_n$  (e mais geralmente em qualquer grupo).

**Proposição 1.2** : *Duas permutações são conjugadas se e só se têm o mesmo tipo cíclico.*

**Demonstração 1.3** : *Se  $\pi$  e  $\rho$  têm o mesmo tipo cíclico, podemos estabelecer uma bijecção entre os ciclos da primeira e os da segunda, tal que a*

um ciclo de comprimento  $m$   $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  de  $\pi$  corresponda um ciclo do mesmo comprimento  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  de  $\rho$ . Definimos, em cada ciclo de  $\pi$ ,  $\tau(x_i) = y_i$ . Verifica-se que  $\tau$  é uma bijecção de  $[n]$  nele próprio que conjuga  $\pi$  e  $\rho$ .

Para demonstrar a recíproca, provamos que o tipo de ciclo de  $\sigma\pi$  é o mesmo que o de  $\pi\sigma$ , para quaisquer permutações  $\pi$  e  $\sigma$ ; desse modo o tipo cíclico de  $\rho = \tau\pi\tau^{-1}$  é o mesmo que o de  $\tau^{-1}\tau\pi = \pi$ .

Seja então  $x_1, x_2, \dots, x_m$  um ciclo de comprimento  $m$  para  $\sigma\pi$ ; temos portanto  $\sigma\pi(x_i) = x_{i+1}$  para  $1 \leq i < m$  e  $\sigma\pi(x_m) = x_1$ ; além disso,  $x_i \neq x_j$  se  $i \neq j$ . Verificamos que  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , onde  $y_i = \pi(x_i)$ , é um ciclo de comprimento  $m$  para  $\pi\sigma$ , já que, para  $i < m$ ,  $\pi\sigma(y_i) = \pi\sigma\pi(x_i) = \pi(x_{i+1}) = y_{i+1}$  e  $\pi\sigma(y_m) = \pi\sigma\pi(x_m) = \pi(x_1) = y_1$ .

Estabelecemos assim uma bijecção entre ciclos de  $\sigma\pi$  e ciclos de  $\pi\sigma$  com o mesmo comprimento, pelo que estas duas permutações têm o mesmo tipo cíclico.

**Definição 1.4 :** O número de Stirling de primeira espécie (sem sinal)  $c(n, k)$  é o número de permutações de  $n$  elementos com  $k$  ciclos.

$c(n, k)$  pode ser descrito como o número de modos de sentar  $n$  pessoas em  $k$  mesas redondas sem que nenhuma mesa fique vazia (para que esta descrição seja precisa, há que esclarecer que as mesas não se distinguem umas das outras e que é possível sentar até  $n - k + 1$  pessoas numa mesa).

Verifica-se facilmente que

$$k < 0 \vee k > n \implies c(n, k) = 0, \quad c(n, 1) = (n - 1)!, \quad c(n, n) = 1$$

Fixando um elemento  $a$  de  $[n]$ , uma permutação  $\pi$  com  $k$  ciclos ou tem  $a$  sozinho num ciclo ou não; o primeiro caso corresponde a uma permutação de  $n - 1$  elementos com  $k - 1$  ciclos, enquanto que o segundo se obtém de uma permutação de  $n - 1$  elementos com  $k$  ciclos intercalando  $a$  numa das  $n - 1$  posições possíveis. Deduzimos assim a seguinte:

**Proposição 1.5** *Os números de Stirling de primeira espécie satisfazem a fórmula de recorrência*

$$c(n, k) = c(n - 1, k - 1) + (n - 1)c(n - 1, k)$$

Por outro lado, se fixarmos um tipo  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ , correspondendo a uma configuração

$$(\dots) \dots (\dots)$$

de blocos ordenados por ordem de grandeza, temos  $n!$  modos de distribuir os elementos pelos espaços; mas para cada ciclo de comprimento  $k$  há  $k$  escolhas diferentes de apresentação do ciclo como sequência ordenada; além disso, há  $\alpha_k!$  maneiras de ordenar os ciclos de comprimento  $k$ . Em resumo,

**Proposição 1.6** *O número de permutações de tipo  $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$  é*

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n} \alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

## 1.2 Transposições e paridade de uma permutação

Uma permutação cíclica que só permuta dois elementos chama-se uma **transposição**. Qualquer permutação se pode representar como composição de transposições. Isso decorre do facto de qualquer ciclo se poder obter como composição de transposições; por exemplo:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, x_k) \dots (x_1, x_i) \dots (x_1, x_4)(x_1, x_3)(x_1, x_2)$$

Mas essa representação não é única. Por exemplo

$$(0, 1, 2, 3, 4) = (0, 4)(0, 3)(0, 2)(0, 1) = (0, 3)(2, 4)(3, 4)(1, 3)(2, 3)(0, 2)$$

Obtemos mais informação sobre essas representações, observando o efeito sobre o tipo de uma permutação  $\pi$  que resulta de a compor com uma transposição  $(a, b)$ .

Se os elementos  $a$  e  $b$  pertencem ao mesmo ciclo de  $\pi$ , verificamos que na composição  $(a, b)\pi$  esse ciclo é decomposto em dois:

$$(a, x, \dots, y, b, w, \dots, z) \rightarrow (a, x, \dots, y)(b, w, \dots, z)$$

Mas se em  $\pi$  os elementos  $a$  e  $b$  estão em ciclos diferentes, na composição  $(a, b)\pi$  estes ciclos são ligados num só:

$$(a, x, \dots, z)(b, w, \dots, y) \rightarrow (a, x, \dots, z, b, w, \dots, y)$$

Ou seja, se  $\pi$  é uma permutação qualquer e  $\tau$  uma transposição,

$$c(\tau\pi) = c(\pi) \pm 1$$

onde  $c(\sigma)$  designa o número de ciclos da permutação  $\sigma$ :  
se  $\sigma$  tem tipo

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n],$$

então

$$c(\sigma) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Suponhamos então que temos duas representações

$$\pi = \tau_k \tau_{k-1} \dots \tau_1 = \rho_j \rho_{j-1} \dots \rho_1$$

como composição de transposições.

Em cada uma delas começamos com a identidade que tem  $n$  ciclos e vamos compondo com as sucessivas transposições  $\tau_i$  ou  $\rho_l$  o que vai aumentando ou diminuindo o número de ciclos numa unidade, até obtermos  $\pi$ ; se designarmos por  $s_1$  o número de vezes em que o número de ciclos aumentou e por  $d_1$  o número de vezes em que diminuiu, na primeira representação, e por  $s_2$  e  $d_2$  os números de vezes em que o número de ciclos aumentou e diminuiu na segunda representação, temos

$$\begin{aligned} s_1 + d_1 &= k, & n + s_1 - d_1 &= c(\pi) \\ s_2 + d_2 &= j, & n + s_2 - d_2 &= c(\pi) \end{aligned}$$

Mas então, fazendo a diferença membro a membro nas segundas igualdades, temos  $s_1 - s_2 - d_1 + d_2 = 0$ , pelo que

$$k - j = s_1 - s_2 + d_1 - d_2 = 2(s_1 - s_2) = 2(d_1 - d_2)$$

e concluímos que

**Proposição 1.7 :** *Uma permutação pode ser representada como composição de um número par de transposições ou como composição de um número ímpar de transposições, mas não de ambos. No primeiro caso dizemos que a permutação é par e tem sinal 1, e no segundo caso que é ímpar e tem sinal  $-1$ .*

**Nota 1.8 :** *Dada uma permutação  $\pi$  e uma transposição  $\tau$  a matriz  $M_{\tau \circ \pi}$  obtém-se de  $M_\pi$  por uma troca de duas linhas; portanto, se  $\pi$  é uma composição de transposições, a sua matriz  $M_\pi$  é o produto das matrizes dessas transposições e resulta de, começando com a matriz identidade, proceder a uma sucessão de trocas de linhas, tantas quantas as transposições na dita composição. Deduzimos que uma permutação par é representada por uma matriz de determinante 1 e uma permutação ímpar por uma matriz de determinante  $-1$ .*

*Outra observação importante é que o sinal de uma permutação é igual a  $(-1)^s$  em que  $s$  é o número de ciclos de comprimento par.*

Fixando uma transposição  $\tau$ , a aplicação

$$\pi \rightarrow \tau\pi$$

define uma bijecção do conjunto das permutação pares no conjunto das permutação ímpares.

Conclui-se que no conjunto  $S_n$  de todas as permutações de  $n$  elementos, metade são pares e metade ímpares.

### Exercícios VIII.1



1. Em quantas permutações  $\pi \in S_n$  ( $n > 2$ ) é que 1 e 2 pertencem ao mesmo ciclo? Quantas permutações têm exactamente dois ciclos?
2. Para um  $k \leq n$  fixo qualquer,
  - a) em quantas permutações  $\pi \in S_n$  é que 1 pertence a um ciclo de comprimento  $k$  (abreviadamente, um  $k$ -ciclo)?
  - b) quantas permutações  $\pi \in S_n$  têm (pelo menos) um  $k$ -ciclo?
3. Quantas permutações  $\pi \in S_n$  satisfazem a condição  $\pi^5(x) = x \forall x \in [n]$ ? E se for  $\pi^6(x) = x$ ?
4. Se  $\pi \in S_n$  tem tipo cíclico  $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , o que podemos dizer sobre o tipo cíclico de

$$\pi^k = \pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi, (k \text{ vezes})?$$

5. O sinal de uma permutação  $\pi$  de  $n$  elementos é definido como 1 se  $\pi$  é par e  $-1$  se é ímpar.  
Mostrar que se  $\pi$  é do tipo  $[i_1, i_2 \dots i_n]$  então o sinal de  $\pi$  é  $(-1)^{n+i_1+i_2+\dots+i_n}$ .
6. Definimos o polinómio em  $n$  variáveis

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j),$$

e, para cada  $\pi \in S_n$ ,

$$P_\pi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\pi(i)} - x_{\pi(j)}).$$

- a) Mostrar que  $P_\pi = \pm P$ .
- b) Mostrar que se  $\pi$  é uma transposição,  $P_\pi = -P$ .
- c) Concluir que a paridade de uma permutação  $\pi$  está bem definida e pode ser calculada como a paridade do número de inversões de  $\pi$ , ou seja, do número de pares  $(i, j)$  tais que  $i < j$  e  $\pi(i) > \pi(j)$ .

### 1.3 Grupos de simetrias

Consideramos agora um outro tipo de representação de permutações de grande interesse.

Considere-se um triângulo equilátero com vértices  $\{1, 2, 3\}$  fixo num plano. Uma rotação de  $2\pi/3$  em torno do centro do triângulo, feita por exemplo no sentido dos ponteiros do relógio, dá lugar a uma permutação dos vértices, ou seja a um elemento de  $S_3$ . Se os vértices foram numerados também no sentido dos ponteiros do relógio, temos a permutação cíclica  $\sigma = (1\ 2\ 3)$ . Por outro lado, se considerarmos a recta que une um dos vértices, por exemplo 1, ao ponto médio do lado oposto, a reflexão do plano sobre essa recta também se traduz numa permutação dos vértices, neste caso  $\rho = (2\ 3)$ .

Verifica-se facilmente que existem 6 simetrias do triângulo, ou seja transformações do plano que levam o triângulo sobre ele próprio, que correspondem exactamente às 6 permutações dos vértices: a identidade, as rotações  $\sigma$  e  $\sigma^2$  e as três reflexões (uma por cada vértice), que se podem representar apenas à custa de uma delas e de  $\sigma$  como  $\rho, \rho\sigma, \rho\sigma^2$ .

Se considerarmos agora um quadrado, com vértices numerados  $\{1, 2, 3, 4\}$  no sentido dos ponteiros do relógio, verificamos que existem 8 simetrias a que correspondem mais uma vez outras tantas permutações dos vértices: a identidade, as rotações de  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $3\pi/2$  em torno do centro do quadrado que dão lugar respectivamente às permutações  $\sigma$ ,  $\sigma^2$  e  $\sigma^3$  em que  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ ; e dois pares de reflexões, umas sobre as rectas que unem os pontos médios de lados opostos e outras sobre as rectas que unem vértices opostos; as primeiras correspondem às permutações  $(1\ 2)(3\ 4)$  e  $(1\ 4)(2\ 3)$ , e as outras a  $(1\ 3)$  e  $(2\ 4)$ . Note-se que desta vez nem todas as permutações  $\pi \in S_4$  são realizadas pelas simetrias do quadrado. No entanto as permutações induzidas por simetrias do quadrado constituem um **subgrupo** de  $S_4$ , uma vez que:

1. a permutação identidade é realizada por simetria (não mover o quadrado);
2. a inversa de uma permutação realizada por uma simetria também é realizada por uma simetria;
3. e a composição de simetrias corresponde à composição das permutações respectivas.

É um bom exercício criar uma tabela de composição deste subgrupo de permutações, verificando por exemplo que a composição de duas reflexões é uma rotação.

Os factos descritos generalizam-se para as simetrias de um polígono regular de  $n$  lados: além da identidade, temos rotações de  $m2\pi/n$ , com  $1 \leq m < n$ , em torno do centro; se  $n$  for par temos reflexões sobre cada uma das rectas ligando pares de lados opostos ou pares de vértice opostos, enquanto que se  $n$  for ímpar, temos reflexões sobre as rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

A estas simetrias correspondem as respectivas permutações dos vértices que constituem um subgrupo com  $2n$  elementos de  $S_n$ , o chamado **grupo diédrico ou diedral**  $D_n$ . Se representarmos a permutação induzida pela rotação de  $2\pi/n$  por  $\sigma$  e uma qualquer das reflexões por  $\rho$ , verificamos que todos os elementos de  $D_n$  se podem representar por composição a partir destes dois:

$$D_n = \{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, 1 = \sigma^n, \rho, \rho\sigma, \dots, \rho\sigma^{n-1}\}$$

É claro que as simetrias do polígono também induzem permutações dos lados do mesmo, de uma maneira completamente análoga ao que acontece com os vértices.

Outros subgrupos interessantes de grupos de permutações podem ser obtidos, por exemplo, através dos grupos de simetrias dos sólidos regulares, ou seja os sólidos com faces todas iguais a um dado polígono regular.

Existem apenas 5 sólidos regulares:

- o tetraedro com 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices;
- o cubo com 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices;
- o octaedro com 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices;
- o dodecaedro com 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices;
- e o icosaedro com 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices.

O facto de os números  $f$ ,  $a$  e  $v$  respectivamente de faces, arestas e vértices satisfazerem sempre a igualdade

$$f - a + v = 2$$

não é casual; de facto, pode provar-se que qualquer sólido convexo com faces poligonais satisfaz essa propriedade. Assumindo esse facto, deduz-se então que aqueles são os únicos sólidos regulares possíveis. Voltaremos ao assunto num capítulo da Teoria de Grafos.

À excepção do tetraedro, as simetrias de cada sólido obtêm-se como rotações em torno de eixos unindo ou vértices opostos, ou pontos médios de arestas opostas, ou centros de faces opostas (note-se que estamos a considerar apenas as simetrias realizáveis no espaço tridimensional). Cada uma dessas simetrias induz uma permutação quer dos vértices, quer das arestas, quer das faces do sólido. Estas permutações, ainda que induzidas pela mesma simetria, não têm que ser do mesmo tipo.

**Exemplo 1.9 :** *As simetrias do tetraedro são obtidas por rotação sobre um eixo unindo um vértice com o centro da face oposta ou por rotação sobre um eixo unindo os pontos médios de arestas opostas. Uma rotação de  $2\pi/3$  sobre o eixo que passa pelo vértice  $a$ , realiza a permutação dos vértices  $(a)(b, c, d)$  e uma permutação do mesmo tipo nas faces: fixa a face  $abc$  (identificando uma face pelo conjunto dos seus vértices) e permuta ciclicamente as outras três; a permutação induzida pela mesma simetria nas arestas tem dois ciclos de comprimento 3:  $(ab, ac, ad)(bc, cd, bd)$  onde  $ab$  designa a aresta que une esses dois vértices; naturalmente, a mesma aresta pode ser representada por  $ba$ . Existem três pares de arestas opostas; consideremos um desses pares, em que uma das arestas tem vértices  $a, b$  e a outra vértices  $c, d$ ; uma rotação de  $\pi$  sobre o eixo respectivo induz uma permutação  $(ab)(cd)$  no conjunto dos vértices; se identificarmos cada face com o conjunto dos seus vértices, a mesma rotação permuta a face  $acd$  com a face  $bcd$  e a face  $abc$  com a face  $abd$ . Verificamos portanto que os grupos de permutações dos vértices e das faces induzidas por rotações do tetraedro, se podem identificar um com o*

outro: cada rotação dá lugar a uma permutação cuja decomposição cíclica é constituída por duas transposições.

A mesma rotação permuta a aresta  $ac$  com a aresta  $bd$  e a aresta  $ad$  com a  $bc$ , deixando fixas as arestas  $ab$  e  $cd$ . Ou seja obtemos uma permutação que tem como decomposição cíclica duas transposições e dois pontos fixos (ciclos de comprimento 1).

**Exemplo 1.10 :** O cubo (bem como os outros sólidos regulares) tem simetrias dos três tipos; usamos a figura anexa para descrever as diferentes simetrias e as permutações induzidas.

Por cada par de faces opostas existe uma rotação de  $\pi/2$  em torno do eixo que une os centros dessas faces; se escolhermos por exemplo as faces  $abcd$  e  $efgh$  e escolhermos a rotação no sentido directo, temos a permutação de vértices

$$(a, c, d, b)(e, g, h, f)$$

a permutação de arestas

$$(ab, ac, cd, bd)(ae, cg, dh, bf)(ef, eg, gh, fh)$$

e a permutação de faces

$$(abcd)(abef, aceg, cdgh, bdfg)(efgh).$$

As permutações de vértices, arestas e faces induzidas por uma rotação de  $\pi$  em torno do mesmo eixo de simetria, deduzem-se facilmente das apresentadas atrás: isto porque, um ciclo de comprimento par  $2m$  de uma permutação  $\alpha$  qualquer se decompõe em dois ciclos de comprimento  $m$  para a permutação  $\alpha \circ \alpha$ , enquanto que um ciclo de comprimento ímpar de  $\alpha$  dá lugar para  $\alpha \circ \alpha$  a um ciclo do mesmo comprimento.

Este é um caso particular da relação entre o tipo cíclico de uma permutação  $\alpha$  e os tipos cíclicos das suas potências  $\alpha^k$  (ver exercícios).

Por cada par de arestas opostas temos uma rotação de  $\pi$  em torno do eixo que une os pontos médios dessas arestas. Escolhendo por exemplo as arestas

*ab e gh, obtemos a permutação de vértices*

$$(a, b)(c, f)(d, e)(g, h)$$

*a permutação de arestas*

$$(ab)(gh)(ac, bf)(ae, bd)(cd, ef)(cg, fh)(eg, dh)$$

*e a permutação de faces*

$$(abcd, abef)(aceg, bfdh)(cdgh, efgh)$$

*Finalmente uma rotação de  $2\pi/3$  em torno do eixo que une, por exemplo os vértices a e h, induz as permutações de vértices*

$$(a)(h)(b, c, e)(f, d, g)$$

*de arestas*

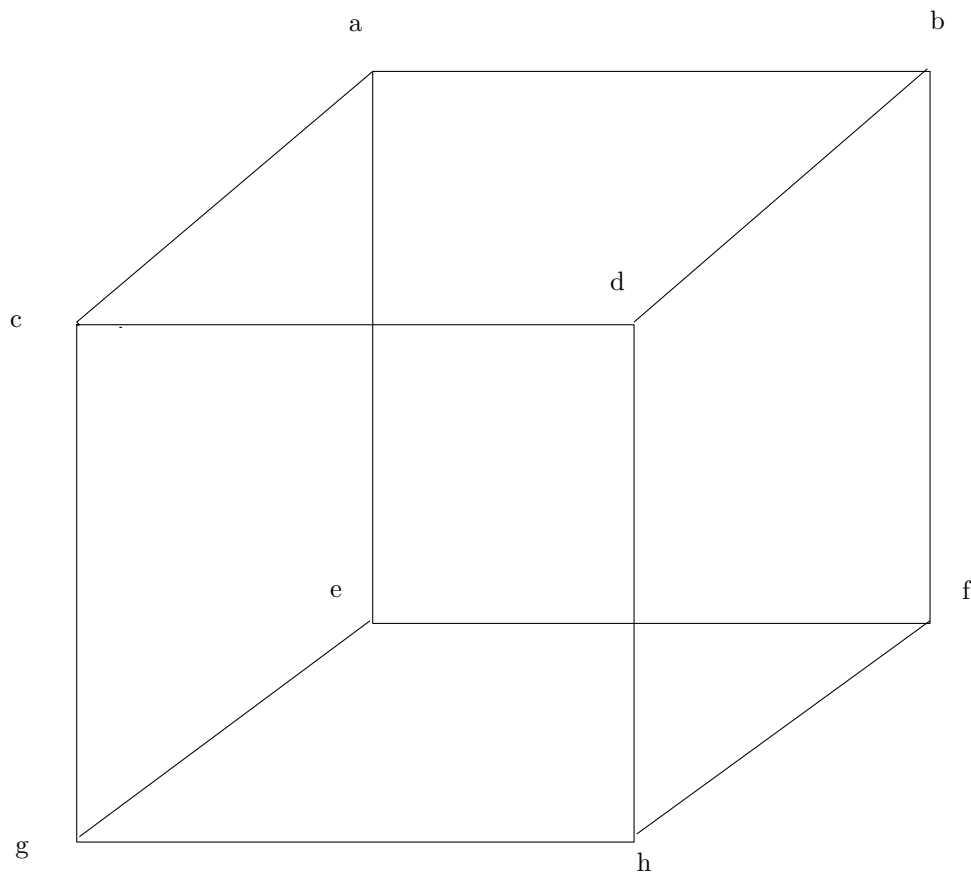
$$(ab, ac, ae)(dh, gh, fh)(bd, cg, ef)(cd, eg, bf)$$

*e de faces*

$$(abcd, aceg, abef)(cdgh, efgh, bdfh)$$

Note-se que, embora as permutações de vértices, arestas ou faces sejam em geral diferentes, se conhecermos a permutação de vértices induzida por uma simetria, podemos deduzir a partir dela as respectivas permutações de arestas e faces.

Também é possível identificar as permutações (de vértices, arestas e faces) do octaedro com as permutações (respectivamente de faces, arestas e faces) do cubo. As simetrias do dodecaedro e do icosaedro estão relacionadas do mesmo modo.



## 2 Contagem com simetria

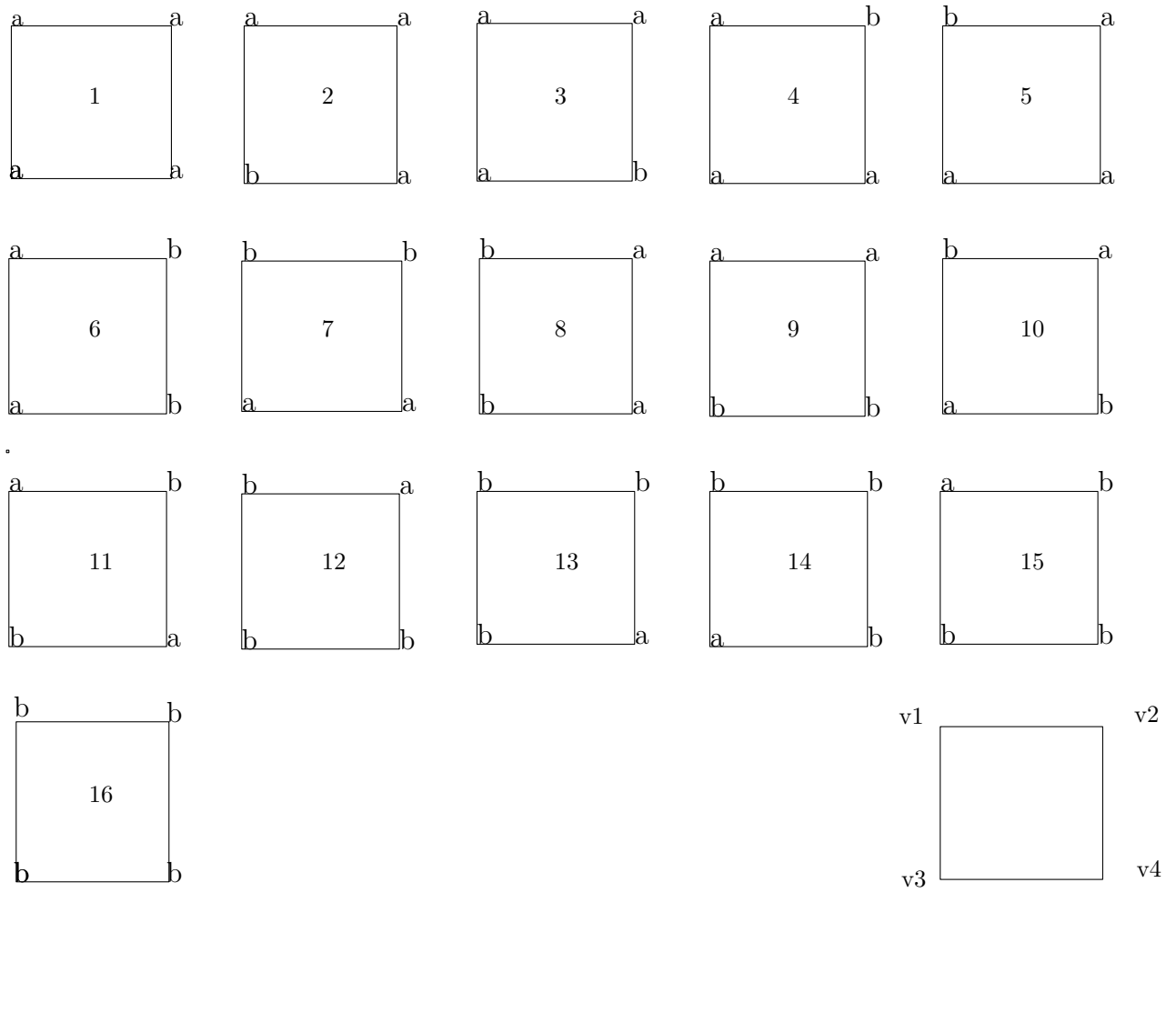
Em alguns problemas de combinatória enumerativa, procuramos contar objectos que estão condicionados por alguma forma de simetria. O exemplo mais simples é o dos modos de sentar  $n$  pessoas numa mesa redonda; deduzimos que havia  $(n - 1)!$  modos começando por sentar uma das pessoas num lugar qualquer e contando depois os modos de sentar as restantes  $n - 1$ .

Podemos interpretar esta contagem do seguinte modo: a mesa pode ser vista como um polígono regular de  $n$  lados, com um grupo de simetrias obtidas por rotação (que são as únicas que nos interessam neste caso). Cada escolha de lugares corresponde a atribuir uma etiqueta a cada lado (ou vértice, é indiferente); se fixarmos um lugar inicial como referência, vemos que cada

uma das escolhas corresponde a uma das  $n!$  maneiras de ordenar  $n$  etiquetas. Mas duas escolhas que sejam identificadas por uma rotação podem ser consideradas idênticas; concluimos então que queremos de facto contar classes de equivalência de escolhas de lugares, em que duas escolhas são equivalentes se podemos transformar uma na outra por uma simetria. Neste caso, cada classe contém exactamente  $n$  escolhas e portanto existem  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$  classes.

Considere-se agora o problema de contar quantos colares diferentes de  $n$  contas se podem fazer com contas de dois tipos. Na figura anexa, podem ver-se todas as maneiras de por etiquetas  $a$  ou  $b$  nos vértices de um quadrado. Considerando duas delas como equivalentes se se puderem transformar uma na outra por uma rotação ou reflexão, verifica-se facilmente que existem 6 classes de equivalência. Ou seja, existem 6 colares de 4 contas feitos com contas de dois tipos.





Vamos agora tratar sistematicamente o problema de contar com simetria, tomando este exemplo simples como guia. Para clarificar a descrição, vamos designar os vértices por  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , começando com  $v_1$  como vértice superior esquerdo e seguindo a orientação dos ponteiros do relógio. Temos um conjunto  $C$  (neste caso, as colorações com 2 cores dos vértices do polígono); E existe um determinado grupo de simetrias  $G$  (neste caso o grupo de permutações dos vértices induzidas por simetrias do polígono) que actua neste conjunto: por exemplo, a permutação cíclica  $\sigma$  dos vértices induzida por uma

rotação de  $\pi/2$ , no sentido dos ponteiros do relógio,  $\sigma = (v_1v_2v_3v_4)$ , induz uma transformação de colorações que transforma a coloração  $c_2$  na  $c_5$ , a  $c_6$  na  $c_9$ , etc. Já a permutação  $\rho$  induzida por uma reflexão sobre o eixo vertical,  $\rho = (v_1v_2)(v_3v_4)$ , transforma  $c_2$  em  $c_3$ ,  $c_6$  em  $c_8$ , etc.

Usamos a notação  $\sigma^*(c_2) = c_5$  para indicar que a permutação (de vértices)  $\sigma$  transforma a coloração  $c_2$  na  $c_5$ .

Cada coloração dos vértices do quadrado é de facto uma função do conjunto dos vértices no conjunto das cores; note-se que o modo como definimos a acção das permutações no conjunto das colorações pode ser descrita pela igualdade

$$\sigma^*(c)(v_i) = c(\sigma^{-1}(v_i)).$$

Dois elementos de  $C$ ,  $t$  e  $s$ , são considerados equivalentes se existe  $\pi \in G$  tal que  $\pi^*(t) = s$ . Este tipo de relação é também descrita dizendo que  $t$  e  $s$  estão na mesma **órbita** pela acção de  $G$ . Esta relação é de facto uma relação de equivalência e portanto estabelece uma partição de  $C$  em conjuntos disjuntos, que são as órbitas.

O nosso objectivo é contar o número  $\omega$  de classes de equivalência (ou seja, de órbitas) de  $C$ .

**Nota 2.1 :** *O termo acção aplicado às transformações realizadas pelos elementos do grupo  $G$  no conjunto  $C$  tem um significado preciso, contido nas seguintes propriedades:*

- i) para todo o  $t \in C$ ,  $\iota^*(t) = t$ , onde  $\iota$  designa o elemento neutro do grupo (a permutação identidade);*
- ii) para todo o  $t \in C$  e  $\sigma, \tau \in G$ ,  $(\tau\sigma)^*(t) = \tau^*(\sigma^*(t))$ .*

*Ou seja, os elementos do grupo actuam no conjunto  $C$  de maneira coerente com a operação no grupo.*

*Note-se, além disso, que, no nosso caso, elementos diferentes do grupo induzem transformações diferentes, quer dizer, se  $\sigma \neq \tau$  então existe  $t \in C$  tal que  $\sigma^*(t) \neq \tau^*(t)$ .*

Vamos usar as seguintes notações:

para cada  $x \in C$ ,

$$O_x = \{y \in C \mid \exists \pi \in G : \pi^*(x) = y\},$$

ou seja,  $O_x$  é o conjunto dos elementos equivalentes a  $x$  pela acção de  $G$ ; no nosso caso, por exemplo,

$$O_2 = \{2, 3, 4, 5\}, \quad O_{10} = \{10, 11\}, \quad O_1 = \{1\}$$

;

para cada  $x \in C$ ,

$$E(x) = \{\pi \in G \mid \pi^*(x) = x\},$$

ou seja,  $E(x)$  é o conjunto dos elementos de  $G$  que fixam  $x$ ; note-se que este conjunto é sempre um subgrupo de  $G$  (o **subgrupo estabilizador** de  $x$ ); por exemplo, no nosso caso, com as designações já usadas acima,

$$E(10) = \{1, \sigma\rho = (v_1v_3), \rho\sigma = (v_2v_4), \sigma^2 = (v_1v_3)(v_2v_4)\}$$

enquanto que, obviamente,  $E(1) = G$ ;

para cada  $\pi \in G$ ,

$$I(\pi) = \{x \in C \mid \pi^*(x) = x\},$$

ou seja,  $I(x)$  é o conjunto dos elementos de  $C$  que são fixos pela acção de  $\pi$ , ou seja, o **conjunto invariante** de  $\pi$ ; mais uma vez no nosso caso, temos por exemplo,

$$I(\sigma) = \{c_1, c_{16}\}, \quad I(\rho) = \{c_1, c_6, c_8, c_{16}\}, \quad I(\sigma^2) = \{c_1, c_{10}, c_{11}, c_{16}\}$$

Intuitivamente, se o subgrupo  $E(x)$  for grande, a órbita  $O_x$  será pequena e vice-versa. De facto, temos uma relação precisa entre os dois:

**Proposição 2.2** : *Dado um elemento  $x \in C$ ,  $|O_x| \times |E(x)| = |G|$ .*

**Demonstração 2.3 :** *Consideramos a função*

$$\psi : G \rightarrow C$$

que faz corresponder a cada  $\pi \in G$  o elemento  $\pi^*(x) \in C$ . A imagem de  $\psi$  é  $O_x$ ; e  $\pi^*(x) = \sigma^*(x)$  se e só se

$$(\pi^{-1}\sigma)^*(x) = x \Leftrightarrow \pi^{-1}\sigma \in E(x)$$

ou seja,  $\sigma = \pi\tau$  com  $\tau \in E(x)$ . E reciprocamente se  $\sigma = \pi\tau$  com  $\tau \in E(x)$ , temos  $\pi^*(x) = \sigma^*(x)$ .

Portanto cada elemento de  $O_x$  é a imagem por  $\psi$  de exactamente  $|E(x)|$  permutações.

Concluimos que, se dois elementos  $x$  e  $y$  estão na mesma órbita, ou seja  $O_x = O_y$ , então  $|E(x)| = |E(y)|$ . De facto, se  $y = \pi^*(x)$  então

$$\tau \in E(y) \Leftrightarrow \pi^{-1}\tau\pi \in E(x).$$

Usamos esta observação para obter uma segunda igualdade: podemos numerar as órbitas e escolher um elemento  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq \omega$ , de cada órbita; então

$$\sum_{x \in C} |E(x)| = \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(y)|$$

ou seja, para somar o número de elementos dos subgrupos estabilizadores de todos os elementos do conjunto, podemos somar para os elementos de cada órbita e depois somar as somas das diversas órbitas. Mas pela observação anterior, para elementos da mesma órbita, o número de elementos do estabilizador é constante, portanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(y)| &= \sum_{i=1}^{\omega} \sum_{y \in O_{x_i}} |E(x_i)| = \\ &= \sum_{i=1}^{\omega} |O_{x_i}| |E(x_i)| = \omega |G| \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da proposição anterior. Juntando as duas igualdades, provámos portanto a seguinte

**Proposição 2.4** :  $\omega = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in C} |E(x)|.$

Esta igualdade não é no entanto a ferramenta adequada para calcular  $\omega$ , uma vez que teríamos que fazer uma soma sobre todos elementos de  $C$ ; no nosso caso teríamos que calcular o número de elementos do subgrupo estabilizador para cada uma das 16 colorações. Mas uma última igualdade melhora bastante a situação:

**Lema 2.5**

$$\sum_{x \in C} |E(x)| = \sum_{\sigma \in G} |I(\sigma)|$$

**Demonstração 2.6** *A justificação desta igualdade é uma aplicação muito simples do princípio da dupla contagem: considere-se a matriz  $R$  cujas linhas são indexadas pelos elementos  $x \in C$  e cujas colunas são indexadas pelos elementos  $\sigma \in G$ , tal que  $R_{ij} = 1$  se  $\sigma_j^*(x_i) = x_i$  e  $R_{ij} = 0$  caso contrário ( $\sigma_j$  designa a permutação na posição  $j$  e  $x_i$  o elemento na posição  $i$ , naturalmente); se contarmos o número de 1 na matriz por linhas, obtemos a soma no lado esquerdo da igualdade, mas se os contarmos por colunas obtemos a soma no lado direito.*

O resultado final das igualdades provadas é a seguinte fórmula para o número  $\omega$  de órbitas de  $C$  por acção de  $G$ :

**Teorema 2.7 (Cauchy-Frobenius-Burnside)** :  $\omega = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |I(\sigma)|.$

De acordo com este resultado, para contar o número de colorações realmente distintas no nosso exemplo (ou seja, o número de classes de equivalência

de colorações), temos que contar quantas colorações ficam invariantes pela transformação induzida por cada permutação dos vértices do quadrado resultante de uma simetria deste.

Claramente, a identidade fixa todas as colorações:  $|I(\iota)| = 16$ ; por outro lado, a permutação  $\sigma = (v_1v_2v_3v_4)$  só fixa as colorações  $c_1$  e  $c_{16}$  e o mesmo acontece com  $\sigma^3$ , logo  $|I(\sigma)| = |I_{\sigma^3}| = 2$ ; já  $\sigma^2 = (v_1v_3)(v_2v_4)$  fixa as colorações  $c_1, c_{10}, c_{11}, c_{16}$ ,  $|I(\sigma^2)| = 4$ ; por outro lado, cada uma das permutações resultantes das reflexões sobre os eixos horizontal e vertical fixa 4 colorações, enquanto que as permutações resultantes das reflexões sobre as diagonais do quadrado fixam 8 colorações cada.

De acordo com o teorema, existem

$$\frac{16 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 8}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

classes de equivalência de colorações.

Vamos agora aplicar este resultado ao cálculo do número de colorações das faces de um cubo, com  $m$  cores.

O facto fundamental, já visível no exemplo anterior, que permite simplificar muito os cálculos é o seguinte:

**Proposição 2.8** : *Dada uma permutação  $\sigma$ , o número  $|I(\sigma)|$  depende apenas do número de cores  $m$  e do número de ciclos de  $\sigma$ . Se  $\sigma$  tem  $k$  ciclos,  $|I(\sigma)| = m^k$ .*

De facto, uma coloração com  $m$  cores dos objectos permutados por  $\sigma$  fica invariante por esta permutação se e só se os elementos de cada ciclo tiverem a mesma cor.

**Exemplo 2.9** : *Para analisar as colorações das faces do cubo, é útil seguir os cálculos numa figura ou mesmo com um modelo tridimensional.*

Cada uma das rotações por um ângulo de  $\pi/2$  sobre eixos unindo os centros de faces opostas induz uma permutação das faces com 3 ciclos: dois de comprimento 1 e um de comprimento 4; temos três eixos e duas rotações para cada um deles, uma no sentido directo e outra no sentido retrógrado; se a primeira induz a permutação  $\rho$ , a outra induz a permutação  $\rho^{-1} = \rho^3$ . Como existem 3 eixos face-face, temos portanto 6 permutações que contribuem com uma parcela  $6m^3$ .

Já cada rotação por um ângulo de  $\pi$ , sobre os mesmos eixos, corresponde a uma permutação  $\rho^2$ , que tem quatro ciclos, dois de comprimento 1 e dois de comprimento 2. Estas três permutações contribuem com  $3m^4$  para a contagem das colorações.

A rotação por um ângulo de  $\pi$  sobre um eixo unindo os pontos médios de duas arestas opostas induz uma permutação com três ciclos de comprimento 2; como há seis eixos desses, temos seis permutações que contribuem com  $6m^3$ .

Finalmente, cada rotação por um ângulo de  $2\pi/3$  ou de  $4\pi/3$  sobre um eixo unindo vértices opostos induz uma permutação de faces com dois ciclos de comprimento 3; há quatro pares de vértices opostos e portanto oito permutações que contribuem com  $8m^2$ .

Somando, sem esquecer a permutação identidade, que fixa todas as  $m^6$  colorações, obtemos

$$p(m) = \frac{1}{24}(m^6 + 3m^4 + 12m^3 + 8m^2)$$

colorações das faces do cubo feitas com  $m$  cores.

Note-se que este número inclui as colorações que usam apenas algumas destas  $m$  cores; para contar o número de colorações com exactamente  $m$  cores, temos que usar o princípio de Inclusão-Exclusão: se  $C_i$  designar as colorações que não usam a cor  $i$ , temos que calcular  $|C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m|$ ; mas o número de colorações que não usam as cores  $i_1, \dots, i_k$  é igual ao número

de colorações com  $m - k$  cores; portanto, o número das colorações das faces do cubo que usam exactamente  $m$  cores é dado por

$$p(m) - mp(m-1) + \binom{m}{2}p(m-2) - \dots = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} p(m-j)$$

Evidentemente, se  $m > 6$  é impossível usar  $m$  cores e esta fórmula traduz correctamente esse facto.

Se considerarmos o problema de calcular o número de colorações dos vértices ou das arestas, temos que contar, para cada simetria do cubo, o número de ciclos da permutação induzida nos vértices ou arestas respectivamente. Por exemplo, o número de colorações dos vértices de um cubo, com  $m$  cores possíveis, é dado por

$$\frac{1}{24}(m^8 + 17m^4 + 6m^2)$$

**Exemplo 2.10** : Este exemplo é de natureza um pouco diferente e retoma uma ideia apresentada mais atrás. Suponhamos que queremos contar de quantas maneiras podemos distribuir 100 bolas iguais por 4 caixas também iguais. Por outras palavras, recordando que  $p_n(k)$  representa o número de partições de  $k$  numa soma de  $n$  parcelas positivas, queremos calcular

$$p_1(100) + p_2(100) + p_3(100) + p_4(100)$$

Se as caixas fossem diferentes, o problema seria já bem familiar: a solução seria  $\binom{100+3}{3}$ , que é também o número de soluções de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad 0 \leq x_i \forall i.$$

A ideia é usar o Teorema de Cauchy-Frobenius-Burnside para descontar neste número o efeito de permutarmos as caixas. Ou seja, queremos identificar



quaisquer duas soluções que se possam obter uma da outra por uma permutação das caixas, o mesmo é dizer dos  $x_i$ . Por exemplo, as quatro soluções

$$0 + 0 + 0 + 100, 0 + 0 + 100 + 0, 0 + 100 + 0 + 0, 100 + 0 + 0 + 0,$$

contadas como diferentes no caso de caixas diferentes, correspondem a uma única solução no problema das caixas iguais.

O grupo de permutações neste caso é o grupo  $S_4$  de todas as permutações de quatro objectos, que tem 24 elementos:

1. a identidade  $\iota = (1)(2)(3)(4)$ ;
2.  $\binom{4}{2}$  permutações do tipo  $\rho = (a, b)(c)(d)$ ;
3.  $\frac{1}{2}\binom{4}{2}$  permutações do tipo  $\sigma = (a, b)(c, d)$ ;
4.  $4 \times 2$  permutações do tipo  $\tau = (a, b, c)(d)$ ;
5.  $3!$  permutações do tipo  $\delta = (a, b, c, d)$ .

Por exemplo, as permutações com dois ciclos de comprimento 2 são

$$(1, 2)(3, 4), \quad (1, 3)(2, 4), \quad (1, 4)(2, 3)$$

De acordo com o teorema, temos que contar para cada permutação, o número de distribuições de bolas pelas caixas ou, de acordo com a descrição que vamos usar a seguir, de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad 0 \leq x_i \forall i$$

que ficam invariantes sob a acção dessa permutação.

Para a identidade, é óbvio que

$$I(\iota) = \binom{103}{3} = 176851$$

ou seja, todas as soluções ficam invariantes.

Para uma permutação do segundo tipo  $\rho = (a, b)(c)(d)$ , uma solução fica

invariante se e só se  $x_a = x_b$ . Procuramos portanto o número de soluções em inteiros não negativos de

$$2x + y + z = 100.$$

Ora  $x$  pode tomar qualquer valor entre  $0 \leq j \leq 50$  e para cada  $j$  podemos distribuir as restantes  $100 - 2j$  unidades pelas outras duas variáveis de  $101 - 2j$  maneiras ( $y$  pode tomar qualquer valor entre 0 e  $100 - 2j$ ). Temos então

$$\sum_{j=0}^{50} (101 - 2j) = 101 \times 51 - 2 \sum_{j=0}^{50} j = 101 \times 51 - 50 \times 51 = 51^2 = 2601$$

Para o terceiro tipo procuramos analogamente o número de soluções de

$$2x + 2y = 100$$

pois temos que ter dois pares de variáveis (ou caixas...) com o mesmo valor (número de bolas). Como se verifica facilmente, o número de soluções é 51 (número de valores, entre 0 e 50 que  $x$  pode tomar). Logo  $I(\sigma) = 51$ .

Uma solução que fica invariante por uma permutação de tipo  $(a, b, c)(d)$  corresponde a uma solução de

$$3x + y = 100;$$

cada solução desta equação é determinada pelo valor de  $x$  que pode variar entre 0 e 33, ou seja, há 34 soluções e  $I(\tau) = 34$ .

Finalmente, a única solução que fica invariante por qualquer permutação do último tipo é

$$x_i = 25 \quad \forall i$$

A aplicação da fórmula geral dá-nos então

$$\frac{1}{|S_4|} \sum_{\pi \in S_4} |I(\pi)| = \frac{1}{24} (176851 + 6 \times 2601 + 3 \times 51 + 8 \times 34 + 6) = 8037$$

**Nota 2.11** *Note-se que este cálculo depende quer do número  $n$  de caixas que determina o grupo de permutações, quer do número  $k$  de bolas, tornando extremamente complicada a possível expressão que poderíamos obter para*

$$\sum_{j=1}^n p_j(k),$$

*válida para todos os  $0 < n \leq k$ .*

*Já é um exercício esclarecedor tentar generalizar o cálculo acima para qualquer  $k$ , mantendo  $n = 4$ .*

*O que torna o cálculo complicado é que  $|I(\pi)|$  não é, como nos exemplos anteriores, da forma  $m^k$  em que  $m$  é um certo número fixo (o número de cores) e  $k$  é o número de ciclos de  $\pi$ . O que se passa aqui é que as cores são substituídas neste exemplo pelos possíveis números de bolas em cada caixa, ou seja, pelos possíveis valores dos  $x_i$ : assim, se  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  estão no mesmo ciclo de  $\pi$ , uma solução de*

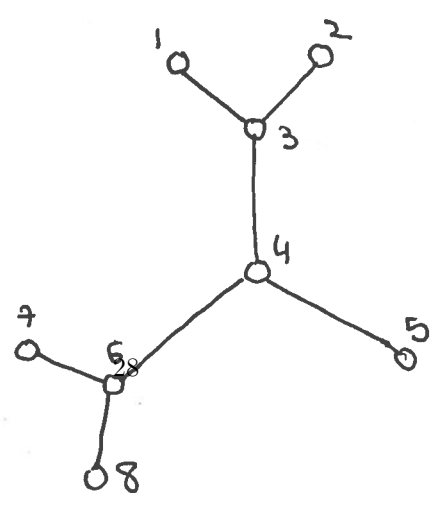
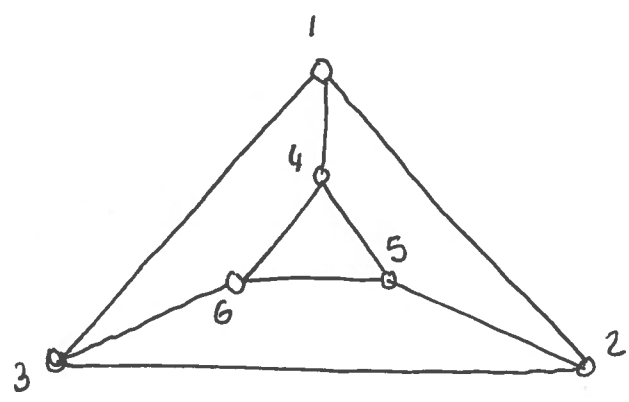
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad 0 \leq x_i \forall i$$

*só pertence a  $I(\pi)$  se  $x_i = x_j$ .*

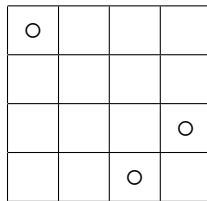
*A dificuldade é que embora os possíveis valores de  $x_i$  sejam  $\{0, 1, \dots, 100\}$ , eles não são independentes uns dos outros: a sua soma tem que ser 100.*

## Exercícios VIII.2

1. Nas figuras anexas, uma simetria é uma permutação dos vértices que preserve a relação de adjacência, ou seja, as ligações entre vértices. Determinar o número de simetrias de cada tipo cíclico, para cada uma das figuras.



2. De quantas maneiras podemos colorir as arestas de um cubo, usando  $m$  cores?
3. Quantas sequências de letras podemos formar com 2 **M**, 4 **A**, 5 **T** e 6 **O**, se cada sequência e a sua inversa (lida da direita para a esquerda) são consideradas a mesma?  
E de quantas maneiras podemos colocar as mesmas letras nos vértices de um polígono regular com 17 lados, se arranjos obtidos um do outro por uma simetria do polígono são considerados iguais?
4. a) De quantas maneiras podemos pintar, com  $m$  cores, um tabuleiro de xadrez?  
b) E se o tabuleiro for transparente?  
c) Considerar os mesmos problemas para um tabuleiro  $7 \times 7$ .
5. Dividimos um cartão quadrado em 16 quadrados iguais e perfuramos 3 desses quadrados no seu centro, como no exemplo da figura:



Tendo em conta que o cartão é igual dos dois lados, quantos cartões diferentes podemos criar?

E se perfurarmos 4 (ou 5 ou 6...) quadrados?

6. De quantas maneiras podemos colorir (com uma cor...) quadrados de um tabuleiro  $n \times n$  com a condição de em cada linha e cada coluna do tabuleiro ficar exactamente 1 quadrado colorido?  
Se considerarmos que duas dessas colorações são equivalentes se podemos transformar uma na outra por uma simetria do tabuleiro (rotação ou reflexão), quantas classes de equivalência existem?

**Nota:** A segunda pergunta deve ser respondida para  $n = 5$  e  $n = 6$ .

7. Quantos cubos diferentes com arestas de comprimento 2 se podem construir usando cubos de arestas de comprimento 1 de 5 cores diferentes? E se forem cubos com arestas de comprimento 3?
8. De quantas maneiras podemos distribuir 100 bolas iguais por 3 caixas quadradas iguais e 3 caixas redondas iguais, se cada caixa pode levar qualquer número de bolas? E se as caixas redondas tiverem capacidade para 20 bolas cada?
9. a) Mostrar, usando o Princípio de Inclusão-Exclusão, que o número de maneiras de colorir os vértices *numerados* de um polígono de  $n$  vértices com  $m$  cores, com a condição de vértices adjacentes (ou seja, ligados por uma aresta) terem cores diferentes, é igual a

$$(m - 1)^n + (-1)^n(m - 1)$$

- b) De quantas maneiras podemos colorir os vértices de um polígono regular de  $n$  vértices com  $m$  cores, com a condição de vértices adjacentes terem cores diferentes?

**Nota:** A condição na primeira alínea dos vértices estarem numerados, corresponde a termos um polígono numa posição fixa. Na segunda alínea, temos já que ter em conta o efeito das simetrias do polígono.