1 Introdução à Teoria dos Grafos

Informalmente, designamos por grafo um diagrama, que podemos representar graficamente no plano, de pontos e linhas com extremos nesses pontos. Nessa representação gráfica não é relevante a localização dos pontos nem as propriedades geométricas das linhas; de facto, a ideia motivadora da noção de grafo é precisamente a de estudar a estrutura e propriedades de uma determinada relação entre certos objectos (representados pelos pontos), abstraindo de todos os outros detalhes.
Um exemplo elementar típico é o de um mapa esquemático de uma rede ferroviária ou de metropolitano, em que as posições relativas das diversas estações e as formas das linhas são ignoradas, para realçar apenas as ligações existentes.

Isso não impede, no entanto, que esta estrutura possa ser enriquecida, acrescentando alguma informação ao grafo; é o caso, no exemplo anterior, de se incluir uma legenda em cada linha indicando, por exemplo, o comprimento da mesma, ou de se atribuirem diferentes cores a certos conjuntos de linhas, etc.
Um caso especial e particularmente importante é o de atribuir um sentido a cada aresta; nesse caso dizemos que o grafo é **dirigido**. Embora estas Notas sejam dedicadas ao estudo de grafos não dirigidos, incluem-se mais à frente as definições básicas sobre grafos dirigidos, que podem ser ocasionalmente utilizados.

Definição 1.1 : *Um grafo G é definido por*

um conjunto V_G, cujos elementos se designam ***vértices****,*

um conjunto E_G, disjunto de V, cujos elementos se designam ***arestas****,*

e uma função de incidência ψ que faz corresponder a cada aresta $e \in E_G$ um par não ordenado de vértices (não necessariamente distintos).

Dado uma aresta e, os vértices pertencentes a $\psi(e)$ são os extremos de e. Se $\psi(e) = \{u, v\}$ dizemos que e e u (tal como e e v) são ***incidentes*** *e que os vértices u e v são* ***adjacentes****. Se $\psi(e) = \{v, v\}$ a aresta e chama-se um* ***lacete****. Se $\psi(e) = \psi(e')$ as arestas e e e' dizem-se* ***paralelas****.*

Caso isso não implique qualquer confusão, omitimos a referência a G e falamos apenas dos conjuntos V de vértices e E de arestas.

Nota 1.2 *A definição da função de incidência pode ser formalizada dizendo que ψ é definida como uma função*

$$\psi : E_G \to (V_G \times V_G)/\sim$$

onde $(V_G \times V_G)/\sim$ designa o conjunto das classes de equivalência de pares $(u, v) \in V_G \times V_G$ para a relação de equivalência determinada por $(u, v) \sim (v, u)$.
Em alternativa. poderíamos também definir ψ como tendo imagem nos 2-multiconjuntos de V_G
No caso de um grafo não ter lacetes, a definição pode ser simplificada como se explica a seguir.

Definição 1.3 *: Um grafo diz-se* ***simples*** *se não tem lacetes nem arestas paralelas. Dado um grafo G qualquer, existe um grafo simples que se obtém de G eliminando todos os lacetes e identificando cada conjunto de arestas paralelas numa única aresta.*

Num grafo simples, uma aresta fica completamente definida pelo par de vértices nela incidentes. Assim podemos definir um grafo simples G por um conjunto de vértices V_G e uma função de adjacência, definida em

$$V_2 = \{X \subset V : |X| = 2\}$$

e com imagem em $\{0, 1\}$:

$$f(\{u, v\}) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ e } v \text{ são adjacentes} \\ 0 & \text{se } u \text{ e } v \text{ não são adjacentes} \end{cases}$$

e podemos designar indiferentemente por uv ou vu a aresta incidente nos vértices u e v.

As definições de grafos enunciadas comportam a possibilidade de quer V, quer E, quer ambos, serem infinitos. Neste curso, a menos que haja menção explícita em sentido contrário, consideraremos apenas grafos com V e E finitos. $|V|$ designa-se a **ordem** do grafo e $|E|$ o **tamanho** do grafo.

Definição 1.4 (Subgrafos) *: Um grafo G' é um* ***subgrafo*** *de um grafo G se*

$$V_{G'} \subset V_G, \qquad E_{G'} \subset E_G$$

e portanto a função de incidência de G' é a restrição da função de incidência de G a $E_{G'}$.
Se $S \subset V$ designamos por $G-S$ o subgrafo de G que se obtém de G eliminando os vértices $v \in S$, bem como as arestas neles incidentes.
Se $F \subset E$, designamos por $G \backslash F$ o grafo que se obtém eliminando as arestas $e \in F$.
Dado um subconjunto $V' \subset V$ o subgrafo $G[V']$ ***induzido*** *por esse conjunto de vértices tem vértices V' e arestas $E' = \{e \in E : \psi(e) \subset V' \times V'\}$, ou seja $G[V'] = G - (V \setminus V')$.*

Duas formas de apresentar um grafo são a matriz de incidência e a matriz de adjacência do grafo. A sua definição depende de se fixar uma ordenação dos conjuntos

$$V = \{v_1, \cdots, v_n\}, \qquad E = \{e_1, \cdots, e_m\}.$$

Definição 1.5 *A* ***matriz de incidência*** *de G é uma matriz M de dimensões $n \times m$ em que a entrada $M(i,j)$ é o número de extremos da aresta e_j que* *incidem no vértice v_i, ou seja,*

$$M(i,j) = \begin{cases} 2 & \textit{se a aresta } a_j \textit{ é um lacete incidente no vértice } v_i \\ 1 & \textit{se a aresta } e_j \textit{ liga o vértice } v_i \textit{ a um outro vértice} \\ 0 & \textit{se } e_j \textit{ e } v_i \textit{ não são incidentes} \end{cases}$$

Definição 1.6 *A **matriz de adjacência** é uma matriz L de dimensões $n \times n$ em que a entrada $L(i,j)$ é o número de arestas que ligam os vértices v_i e v_j. Mais uma vez, um lacete no vértice v_i contribui com 2 para a entrada $L(i,i)$.*

Nota 1.7 *A matriz de adjacência de um grafo é simétrica. Além disso, se G é um grafo simples as entradas da matriz de adjacência são 0 ou 1 e $L(i,i) = 0$ para todo o $1 \leq i \leq n$.*

Definição 1.8 *O **grau** de um vértice v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v, contadas com multiplicidade (os lacetes são contados duas vezes).*

Definição 1.9 *Definem-se os graus mínimo e máximo de um grafo:*

$$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V_G\}, \qquad \Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V_G\}.$$

Definição 1.10 *Um grafo G diz-se **regular** de grau k se $\delta(G) = \Delta(G) = k$.*

A aplicação do Princípio da dupla contagem à matriz de incidência de um grafo, conduz-nos ao primeiro teorema da teoria dos grafos: somando as entradas de M pelas colunas obtemos $2|E|$; mas contando por linhas obtemos a soma dos graus dos vértices. Portanto

Teorema 1.11 *: Dado um grafo com vértices V e arestas E*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Uma consequência imediata deste resultado é que

$$\sum_{v \in V} d(v) \equiv 0 \mod 2$$

Como $d(v) \mod 2$ é 1 se o grau $d(v)$ é ímpar e 0 caso contrário, concluímos

Corolário 1.12 : *Em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par.*

O seguinte resultado é uma consequência imediata das definições e deixa-se como exercício:

Proposição 1.13 : *As matrizes de incidência e de adjacência de um grafo estão relacionadas entre si pela equação*

$$MM^t = D + L$$

onde M^t representa a matriz transposta de M e D é a matriz diagonal definida por $D(i,i) = d(v_i)$.

1.1 Sequência de graus de um grafo

Os graus dos vértices de um grafo G de ordem n podem ser apresentados como uma sequência $d_1, \cdots, d_n$ com $d_i \geq 0$.
Uma sequência de inteiros não negativos diz-se uma **sequência gráfica** se for a sequência de graus de um grafo. O teorema anterior dá uma condição necessária para que uma sequência $d_1, \cdots, d_n$ seja uma sequência gráfica: tem que se verificar

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \equiv 0 \mod 2$$

Se não impusermos qualquer restrição nas propriedades do grafo, esta condição é também suficiente: toda a sequência

$$(d_1, \cdots, d_n) : \sum_{i=1}^{n} d_i \equiv 0 \mod 2$$

é a sequência de graus de um grafo G de ordem n, conforme se pode provar por indução em n.

Mas se exigirmos, por exemplo, que G não tenha lacetes, aquela condição já não é suficiente; prova-se de facto que

Proposição 1.14 : *Uma sequência $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$ é a sequência (ordenada) de graus de um grafo G de ordem n sem lacetes, se e só se verificar as condições*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \equiv 0 \mod 2; \qquad d_1 \leq \sum_{i=2}^{n} d_i$$

A demonstração é deixada como exercício.

Existe uma condição necessária e suficiente do mesmo tipo (mas mais complicada) para que uma sequência seja a sequência gráfica de um grafo **simples**. Uma outra forma de tratar esse problema é a seguinte:

Teorema 1.15 *uma sequência $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$ é a sequência de graus de um grafo simples G de ordem n se e só se a sequência*

$$d_2 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots d_n$$

também o for.

Ou seja, para verificar se temos a sequência gráfica de um grafo simples, eliminamos d_1, subtraimos uma unidade a cada um dos d_1 elementos seguintes e examinamos a sequência assim obtida (depois de devidamente reordenada de forma não crescente); este processo de redução pode ser repetido até se obter uma sequência que claramente é ou não gráfica.

Demonstração 1.16 : *Uma das implicações é fácil: se*

$$d_2 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots d_n$$

for a sequência gráfica de um grafo simples (de ordem $n-1$), acrescentando um novo vértice adjacente a cada um dos primeiros d_1 vértices, obtemos exactamente um grafo com a sequência gráfica

$$d_1, d_2, \cdots, d_n$$

Para provar a recíproca, suponhamos que $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$ é a sequência de graus de um grafo simples G de ordem n. Vamos indexar os seus vértices de modo a que $d(v_i) = d_i$. Há dois casos possíveis:
(i) Se v_1 é adjacente a $v_2, \cdots, v_{d_1+1}$, podemos eliminar v_1, juntamente com as suas arestas, e obter um grafo simples com sequência gráfica

$$d_2 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots d_n$$

Ou seja fazemos a operação inversa da descrita no parágrafo anterior.
(ii) Suponhamos que isso não acontece, isto é existe um subconjunto de vértices

$$\{u_1, \cdots, u_k\} \subset \{v_2, \cdots, v_{d_1+1}\}$$

a que v_1 não é adjacente; então v_1 é adjacente a vértices

$$\{x_1, \cdots, x_k\} \subset \{v_{d_1+2}, \cdots, v_n\}$$

Dado o modo como os vértices foram indexados, cada um destes tem grau menor ou igual aos dos $u_i, \cdots, u_k$; e podemos mesmo assumir que $d(u_i) > d(x_j)$ (para todos os $1 \leq i, j \leq k$) pois nos casos em que o grau fosse igual, podemos trocá-los sem alterar a sequência gráfica.
$d(u_1) > d(x_1)$ implica que existe w tal que u_1 é adjacente a w mas x_1 não é; podemos então alterar o grafo do seguinte modo: apagamos as arestas v_1, x_1 e u_1, w e acrescentamos arestas v_1, u_1 e x_1, w; note-se que os graus dos diversos vértices fica inalterado. Repetindo este procedimento, acabamos por ficar no caso (i).

Exemplo 1.17 *Verificamos se a sequência* $[7, 6, 6, 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2]$ *é gráfica: em cada linha apresentamos a sequência, já reordenada de forma não crescente, obtida da anterior pelo procedimento descrito na proposição:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\
 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1
\end{array}$$

Esta última sequência é claramente gráfica: é, por exemplo, a sequência de graus do grafo com vértices v_i*,* $1 \leq i \leq 9$ *em que só existem arestas entre vértices de índices consecutivos. Portanto a sequência inicial também é gráfica.*

1.2 Passeios e caminhos. Conectividade

Definição 1.18 *: Um* ***passeio*** *de comprimento* k *num grafo é uma sucessão de vértices e arestas*

$$v_0 a_0 v_1 \cdots v_{k-1} a_{k-1} v_k$$

em que para todo o $i < k$*, a aresta* a_i *incide nos vértices* v_i *e* v_{i+1}*.* v_0 *é o vértice inicial e* v_k *o vértice final do passeio.*
Um passeio diz-se ***simples*** *se não repete arestas.*
Um passeio simples é um ***caminho*** *se não repete vértices.*
Um passeio é ***fechado*** *se termina no vértice inicial.*
Um passeio simples fechado chama-se um ***circuito*** *e um caminho fechado um* ***ciclo****.*

Note-se que quando estamos num grafo simples, a sequência de arestas de um caminho é completamente determinada pela sequência dos vértices.

Algumas definições relativas às noções de passeios e caminhos em grafos:

Definição 1.19 *1. O* ***comprimento de um passeio*** *(e em particular de um caminho) é o número de arestas (contadas com repetição) que aparecem no passeio.*

2. A ***distância*** $d(u,v)$ *entre dois vértices* u *e* v *é o mínimo do comprimento dos caminhos entre* u *e* v*. Se não existe um caminho entre* u *e* v*,* $d(u,v) = +\infty$*.*

3. A ***excentricidade*** $exc(v)$ *de um vértice* v *é definida por*

$$exc(v) = \max\{d(v,u) : u \in V_G\}$$

4. O ***raio*** *e o* ***diâmetro*** *do grafo* G *são definidos respectivamente por*

$$r(G) = \min\{exc(v) : v \in V_G\}, \qquad diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V_G\}$$

5. Definimos ainda o ***centro*** *e a* ***periferia*** *de um grafo como os conjuntos de vértices que têm respectivamente, excentricidade mínima ou máxima.*

6. A ***cintura*** *de um grafo é o menor comprimento possível de um circuito no grafo.*

Se existe um passeio em G com vértice inicial u e vértice final v, existe igualmente um caminho entre esses vértices: de facto, se no passeio de u para v

$$ua_0v_1a_1\cdots v_ia_i\cdots a_{j-1}v_ja_j\cdots v$$

se tem $v_i = v_j$, podemos eliminar o passeio fechado intermédio obtendo assim um novo passeio

$$ua_0v_1a_1\cdots v_ia_j\cdots v$$

Repetindo esta operação enquanto existirem vértices repetidos, acabamos por ter um caminho de u para v.

A entrada $L(i,j)$ da matriz de adjacência de um grafo representa o número de arestas incidentes nos vértices v_i e v_j, ou seja, o número de passeios de comprimento 1 entre esses vértices. Neste sentido, a definição feita de que

um lacete no vértice v_i contribui com 2 para a entrada $L(i,i)$ é coerente com a interpretação de que um lacete pode ser percorrido nos dois sentidos e determina portanto a existência de dois passeios de comprimento 1 de v_i para v_i.
A seguinte generalização pode ser facilmente demonstrada por indução (exercício):

Proposição 1.20 *Seja L a matriz de adjacência de um grafo. Para todo o par de vértices v_i, v_j, a entrada $L^k(i,j)$ da k-ésima potência de L representa o número de passeios de comprimento k entre os esses vértices.*

Definição 1.21 : *Um grafo G é **conexo** se dados dois vértices distintos u e v, existe um caminho com vértice inicial u e vértice final v. Uma componente conexa de G é um subgrafo H de G, conexo, e tal que qualquer subgrafo de G que contenha estritamente H é desconexo.*

Qualquer grafo tem uma decomposição em componentes conexas. Essa decomposição pode ser obtida notando que a relação definida no conjunto dos vértices por $u \sim v$ se existe um caminho em G com vértice inicial v e vértice final u, é uma relação de equivalência, e que para cada classe de equivalência V' o grafo $G[V']$ é uma componente conexa de G.

Definição 1.22 : *Um grafo é **Euleriano** se admitir um passeio simples que passa por todas as arestas (um passeio euleriano).*

O seguinte resultado, que pode ser visto como o ponto de partida da Teoria dos Grafos como teoria matemática, caracteriza os grafos Eulerianos.

Teorema 1.23 *(Euler) : Um grafo G é Euleriano se e só se for conexo e tiver exactamente ou 0 ou 2 vértices de grau ímpar. No primeiro caso, G admite um passeio euleriano fechado, enquanto que no segundo caso G admite um passeio euleriano com início num vértice de grau ímpar e término no outro.*

Demonstração 1.24 *: Note-se em primeiro lugar que as condições são obviamente necessárias: só pode existir um passeio, fechado ou não, que percorra todas arestas, se o grafo for conexo. Além disso, se G admite um passeio fechado que percorre todas as arestas, o grau de cada vértice é par, uma vez que por cada aresta usada para "entrar" no vértice tem que haver uma aresta de "saída"; o caso de um passeio euleriano não fechado é semelhante.*

Verificamos agora que essas condições são também suficientes: Considere-se primeiro o caso em que todos os vértices de G têm grau par. Note-se que, com esta condição, se iniciarmos num vértice v qualquer um passeio simples, é possível sempre continuá-lo a menos que tenhamos regressado a v e já tenham sido percorridas todas as arestas incidentes a v. Suponhamos que temos um passeio simples fechado em G que não contém todas as arestas; então existe algum vértice u (já incluído no passeio, porque G é conexo) com arestas incidentes, necessariamente em número par, ainda não percorridas; iniciamos aí um novo passeio simples fechado, percorrendo apenas arestas ainda não percorridas, que intercalamos no passeio original. Este processo pode ser repetido enquanto houver arestas não percorridas.

Formalizamos esta ideia numa demonstração por indução na ordem de G; se G tem só um vértice ele terá necessariamente grau 0 e não há nada a demonstrar. Suponhamos que a propriedade é verdadeira para todos os grafos conexos sem vértices de grau ímpar e ordem menor que n e seja G um grafo de ordem n e com as mesmas propriedades.
Escolhendo um vértice v qualquer para o iniciar podemos, pelo raciocínio feito atrás, construir um passeio simples fechado que percorre todas as arestas incidentes em v; se este não for um passeio euleriano de G considere-se o grafo H que se obtém eliminando em G todas as arestas já percorridas.
Em cada uma das componentes conexas H_i de H existe pelo menos um vértice u_i já visitado pelo passeio original (porquê?); por outro lado, como todos os vértices de H têm grau par, em cada uma dessas componentes, que têm ordem menor que n, existe por hipótese de indução um passeio euleriano que podemos considerar ter início e término em u_i.

Intercalando estes passeios eulerianos dos H_i no passeio original, obtemos um passeio euleriano de G.

A demonstração no caso de haver exactamente 2 vértices de grau ímpar u e v pode ser feita assim: acrescentando uma nova aresta e que ligue u a v, ficamos no caso anterior e há um passeio euleriano fechado; podemos considerar que esse passeio tem início e término em u e que e é a última aresta percorrida; eliminando e do passeio (e do grafo) ficamos com um passeio euleriano que começa em u e termina em v.

Definição 1.25 *: Um grafo é **Hamiltoniano** se admite um caminho que visita todos os vértices.*

O problema de determinar se um grafo é Hamiltoniano é muito mais difícil de tratar.
Existem no entanto resultados que nos dão condições quer necessárias quer suficientes para que um grafo seja Hamiltoniano. Dois dos mais simples são os seguintes:

Teorema 1.26 *: Seja G um grafo com um ciclo hamiltoniano. Então, se S é um conjunto de k vértices, o grafo $G - S$ que se obtém de G eliminando esses vértices e as arestas neles incidentes, tem no máximo k componentes conexas.*

A demonstração é deixada como exercício.

Teorema 1.27 (Dirac) *Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $\delta(G) \geq n/2$, então G tem um ciclo Hamiltoniano.*

Demonstração 1.28 : *demonstramos o resultado por contradição, ou seja supômos que G satisfaz as hipóteses e não tem ciclos Hamiltonianos e derivamos uma contradição. A estratégia desta demonstração passa por notar que se acrescentarmos arestas ao grafo não alteramos as hipóteses e portanto basta considerar o caso extremo em que supômos que G é um grafo simples com $d(v) \geq n/2$ para todo o $v \in V$ e com o maior número possível de arestas, sem ciclos hamiltonianos.*
É claro que G não pode ser um grafo completo (ou seja, em que todos os pares de vértices são adjacentes), pois nesse caso há sempre um ciclo Hamiltoniano. Sejam então $x, y \in V$ não adjacentes; se acrescentarmos a aresta xy ficamos com um ciclo Hamiltoniano e existe portanto um caminho hamiltoniano $v_1 v_2 \cdots v_n$ com $v_1 = x$ e $v_n = y$; sejam $v_{i_1}, \cdots v_{i_k}$ os vértices a que x é adjacente; pelas hipóteses $k \geq n/2$, $1 < i_1$ e $i_k < n$; pelo princípio do Pombal y terá que ser adjacente a algum dos vértices $v_{i_1-1}, \cdots v_{i_k-1}$, chamemos-lhe v_{j-1}; mas então a sequência

$$v_1 v_2 \cdots v_{j-1} v_n v_{n-1} \cdots v_j v_1$$

dá um ciclo Hamiltoniano em G e chegámos à contradição.

1.3 Isomorfismos e Automorfismos

Definição 1.29 : *Dois grafos G e H dizem-se* isomorfos *($G \cong H$) se existir uma bijecção $f : V_G \to V_H$ e uma bijecção $g : E_G \to E_H$ tais que as respectivas funções de incidência satisfazem*

$$\psi_G(a) = \{u, v\} \Leftrightarrow \psi_H(g(a)) = \{f(u), f(v)\}, \forall a \in E_G$$

Evidentemente se $G \cong H$ os grafos são cópias um do outro.

No caso de grafos simples a definição pode ser enunciada de modo mais conciso: dois grafos simples G e H são isomorfos se existir uma bijecção $f : V_G \to V_H$ tal que, para qualquer par de vértices $u, v \in V_G$, u e v são adjacentes se e só se $f(u)$ e $f(v)$ também o são.

As propriedades e características de grafos discutidas acima, e muitas outras que serão consideradas mais adiante, são invariantes por isomorfismo. Por exemplo, grafos isomorfos têm a mesma sequência de graus e portanto esta sequência é um invariante de isomorfismo. No entanto existem grafos não isomorfos com a mesma sequência de graus.
Esse facto justifica que falemos, por exemplo, no grafo completo com n vértices, ou seja, em que todos os vértices são adjacentes, e que designamos por K_n, embora nos estejamos a referir, em bom rigor, à classe de equivalência por isomorfismo de todos os grafos com essa propriedade, ou a um seu representante particular.
No mesmo sentido, ao estudarmos propriedades dos grafos atribuímos designações aos vértices e arestas de modo arbitrário, já que quaisquer outras designações correspondem a um grafo isomorfo.

Isso não quer dizer que o conceito de isomorfismo de grafos não seja fundamental: podemos ter por exemplo dois grafos definidos a partir de construções diferentes e querermos saber se são isomorfos, ou seja, se para todos os efeitos "são o mesmo grafo". Esse problema pode ser bastante difícil de resolver. Em geral para mostrar que dois grafos não são isomorfos é suficiente detectar uma propriedade invariante por isomorfismo que esteja presente num deles e não no outro. Já para provar para que dois grafos são isomorfos é em geral necessário encontrar explicitamente um isomorfismo.

O isomorfismo de grafos traduz-se nyuma relação entre matrizes de adjacência. A demonstração é deixada como exercício:

Proposição 1.30 : *Dois grafos G e H com matrizes de adjacência L_G e L_H são isomorfos se e só se existir uma matriz de permutação P tal que $L_G P = P L_H$.*

Nota 1.31 *As matrizes de adjacência contêm necessariamente toda a informação sobre os grafos. É portanto natural pesquisar como se traduzem*

as propriedades combinatórias dos grafos em propriedades algébricas das respectivas matrizes, e vice-versa. Esse estudo constitui uma parte da chamada Teoria Algébrica dos Grafos.
Em particular, a proposição anterior mostra que qualquer propriedade de uma matriz que fique invariante por conjugação fornece um invariante de isomorfismo que permite testar se dois grafos são isomorfos.

Um isomorfismo do grafo G com ele próprio chama-se um **automorfismo** de G. Por exemplo no grafo completo K_n qualquer permutação de $[n]$ induz uma bijecção dos vértices que preserva a relação de adjacência portanto um automorfismo do grafo.

1.4 Grafos dirigidos

Definição 1.32 *Um grafo dirigido é um grafo em que cada aresta tem uma orientação. Adaptando a definição, um grafo dirigido consiste num conjunto V de vértices, num conjunto E de arestas, disjunto de V, e numa função de incidência*

$$\phi : E \to V \times V, \qquad \phi(e) = (i(e), t(e))$$

$i(e)$ é o vértice inicial e $t(e)$ o vértice terminal da aresta e.

Fica igualmente definida a função $\psi : V \times E \to \{-1, 0, 1\}$:

$\psi(v, e) = 0$ *se e é um lacete ou se e não incide em v;*

$\psi(v, e) = 1$ *se e não é lacete e $v = i(e)$;*

$\psi(v, e) = -1$ *se e não é lacete e $v = t(e)$;*

$$d^-(v) = |\{a \in A : t(a) = v\}|, \qquad d^+(v) = |\{a \in A : i(a) = v\}|$$

são, respectivamente, o grau de entrada e de saída de v.

Num grafo dirigido definem-se passeios e caminho dirigidos como sendo aqueles que percorrem as arestas de acordo com a sua orientação.

As definições das matrizes de incidência e adjacência são igualmente alteradas para dar conta da orientação das arestas: dada uma ordenação dos conjuntos

$$V = \{v_1, \cdots, v_n\}, \qquad E = \{e_1, \cdots, e_m\},$$

a matriz de incidência M tem $n = |V|$ linhas e $m = |E|$ colunas e é definida por $M(i, s) = \psi(v_i, e_s)$.

A matriz de adjacência L é uma matriz $n \times n$ definida por

$$L(i, j) = |\{e \in E : i(e) = v_i \wedge t(e) = v_j\}$$

Ao contrário do que se passa num grafo não dirigido, a matriz de adjacência de um grafo dirigido não é necessariamente simétrica.
À semelhança do que se passa no caso não dirigido, a entrada (i, j) da k-ésima potência de L, $L^k(i, j)$, é o número de passeios dirigidos com início em v_i e término em v_j.

Os grafos dirigidos têm aplicações importantes, quer matemáticas quer na modelação de fenómenos estudados noutras ciências. Além disso, certos resultados sobre grafos não dirigidos são melhor compreendidos se se considerarem orientações nas arestas.

Exercícios IX.1

1. Demonstrar, por indução em n, a **Proposição 1.14**.
2. Verificar se cada uma das listas seguintes pode representar os graus dos vértices de um grafo (simples) e no caso afirmativo, representar graficamente um grafo nessas condições:

   a) $\{3, 3, 2, 2, 2, 1\}$

   b) $\{6, 6, 6, 4, 4, 2, 2\}$

c) $\{6, 6, 6, 6, 5, 4, 2, 1\}$

d) $\{6, 6, 6, 4, 4, 3, 3\}$

3. Mostrar que em qualquer grafo existem dois vértices com o mesmo grau. Sugestão: usar o Princípio do Pombal.

4. O complemento de um grafo simples G, é o grafo simples $\overline{G}$ que tem os mesmos vértices de G mas em que dois vértices são adjacentes se e só se o não forem em G.

   a) Se G tem n vértices com graus $d_1, d_2, \cdots, d_n$ quais são os graus dos vértices de $\overline{G}$?

   b) Mostrar que se G é desconexo, então $\overline{G}$ é conexo. A recíproca é verdadeira?

   c) Mostrar que se G e $\overline{G}$ são isomorfos e têm n vértices, então

$$n \equiv 0 \text{ ou } 1 \mod 4.$$

5. Um grafo é regular de grau k se todos os vértices têm grau k.

   a) Seja G um grafo conexo regular com 22 arestas. Quantos vértices tem G?

   b) Quantos grafos de ordem 7 e regulares de grau 4, não isomorfos, é que existem?
   Sugestão: considerar o complemento do grafo.

   c) Mostrar que para todo o inteiro par $n \geq 4$, existe um grafo conexo com n vértices regular de grau 3.

6. Demonstrar a **Proposição 1.13**.

7. Demonstrar a **Proposição 1.20**.

8. Seja G um grafo com 10 vértices e 28 arestas. Justificar que G contém um ciclo de comprimento 4.
   Sugestão: começar por mostrar que há dois vértices u e v tais que

$$d(u) + d(v) \geq 12.$$

9. Dado $n > 0$, seja $Pet(n)$ o grafo simples em que os vértices são os subconjuntos de $[2n+1]$ com n elementos, e dois vértices S_1 e S_2 são adjacentes se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

   a) Quantos vértices e arestas tem $Pet(n)$?

   b) Se $|S_1 \cap S_2| = 1$, qual o valor de $dist(S_1, S_2)$ em $Pet(n)$?

10. O *grafo linha* $l(G)$ de um grafo simples G é o grafo que tem as arestas de G como vértices e em que dois vértices são adjacentes se e só se enquanto arestas de G incidem num mesmo vértice.

   a) Determinar $\overline{l(K_5)}$ onde K_5 designa o grafo completo (ou seja, em que todos os vértices são adjacentes entre si) com 5 vértices;

   b) Se G tem vértices $v_1, \cdots, v_n$ com $d(v_i) = r_i$ e $\sum_{i=1}^{n} r_i = 2m$ é o número de arestas, determinar o número de vértices e de arestas de $l(G)$ em função de n, de m e dos r_i.

11. Seja G um grafo tal que todos os vértices têm grau maior ou igual a d, e em que o menor ciclo tem comprimento 5. Justificar que $|V_G| \geq d^2 + 1$.

12. Dado um grafo conexo de diâmetro D e grau máximo Δ,

   a) Fixando um vértice v_0, provar que o número de vértices à distância k de v_0 é menor ou igual a $\Delta(\Delta - 1)^{k-1}$;

   b) Concluir que o número total de vértices de G é menor ou igual a

$$1 + \Delta \frac{(\Delta - 1)^D - 1}{\Delta - 2}$$

13. Mostrar que $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$ e dar exemplos de grafos simples em que se tem cada uma das igualdades e em que se tem desigualdade estrita.

14. Dado $m > 2$, C_m designa o grafo com vértices $v_1, v_2, \cdots, v_m$ e com arestas

$$\{v_i v_{i+1} : \forall 1 \leq i < m\} \cup \{v_m v_1\},$$

ou seja, um ciclo de comprimento m.
Se L é a matriz de adjacência de C_{10} (para a ordenação dos vértices dada pelos índices) qual o valor da entrada $(1,5)$ de L^{2017}?

15. Se A é a matriz de adjacência de um grafo G, definimos a sucessão de matrizes
$$S_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k$$
Mostrar que
   a) se k é o menor inteiro tal que a linha i de S_k não contém zeros, então k é a excentricidade de v_i;
   b) se t é o menor inteiro tal que as entradas de S_t são todas positivas, então $diam(G) = t$.

16. Seja A a matriz de adjacência de um grafo G. Mostrar que o número de triângulos de G é $\frac{1}{6}tr(A^3)$.

17. Demonstrar que num grafo conexo dois caminhos de comprimento máximo têm sempre um vértice em comum.

18. Seja G um grafo simples com n vértices.
   a) Mostrar que se $|E_G| > \binom{n-1}{2}$, então G é conexo.
   b) Dar um exemplo de um grafo desconexo em que $|E_G| = \binom{n-1}{2}$.
   c) Mostrar que se o grau mínimo de G satisfaz $\delta(G) > \dfrac{n-2}{2}$, então G é conexo.
   d) Dar um exemplo de um grafo desconexo com $\delta(G) = \dfrac{n-2}{2}$.
   e) Mostrar que se $\delta(G) \geq k$ então G contém um caminho de comprimento k; se $k > 1$, G contém um ciclo de comprimento maior ou igual a $k+1$.

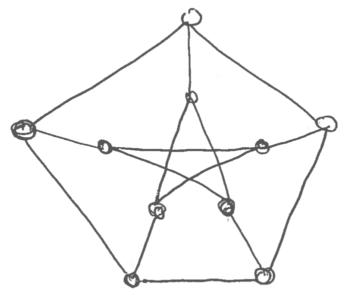
19. Seja G um grafo simples regular de grau 4. Mostrar que podemos colorir as arestas de G com duas cores de modo a que em cada vértice incidem duas arestas de cada cor.

20. O Museu Mundial dos Grafos está instalado num edifício cúbico, dividido em 27 salas cúbicas (nove por andar). Cada sala tem comunicação com todas as salas adjacentes (ou seja todas aquelas com as quais tem uma face em comum). A entrada está numa das salas de esquina do primeiro piso. Será possível fazer uma visita ao Museu, passando uma única vez em cada sala e terminando na sala que se situa no centro do edifício?

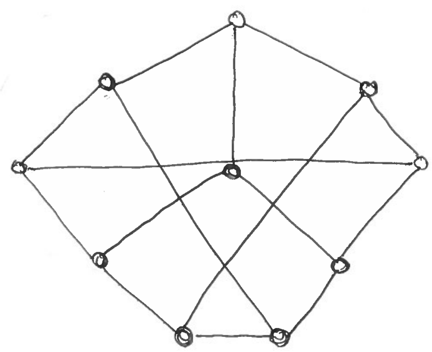
21. Dois dos grafos da figura anexa são isomorfos. Identificar o par de grafos isomorfos e descrever um isomorfismo. Justificar porque é que o terceiro grafo não é isomorfo aos outros.

Exercício 19

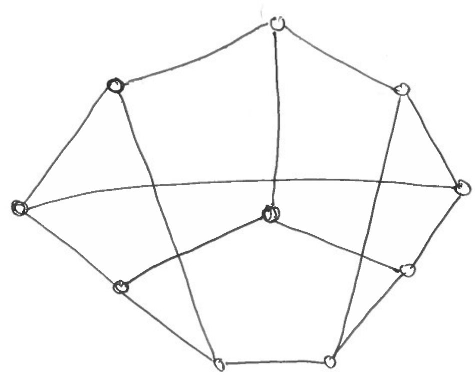
A



B



C



22. Determinar quantos automorfismos têm os seguintes grafos:

   a) O grafo completo K_n;
   b) Um ciclo C_n com n vértices;
   c) O grafo que se obtém de K_n eliminando 3 arestas (considerar os quatro casos possíveis) .

   Sugestão para a alínea c): Notar que $f : V \to V$ é um automorfismo de um grafo com vértices V se e só se for também um automorfismo do seu complementar.