

1 Colorações de grafos

Definição 1.1 *Uma k -coloração de um grafo G é uma função $f : V \rightarrow S$ definida no conjunto dos vértices de G e com imagem num conjunto S com k elementos (o conjunto das cores), com a propriedade de que se u e v são adjacentes então $f(u) \neq f(v)$. Um grafo para o qual existem k -colorações diz-se k -colorável.*

Por definição, um grafo com lacetes não admite colorações. Por outro lado, um grafo sem lacetes é k -colorável se e só se o grafo simples que se obtém identificando todos os conjuntos de arestas paralelas também o for. Assim, no que segue, consideraremos apenas grafos simples.

Definição 1.2 *O número de coloração de G , $\chi(G)$, é o menor k para o qual G é k -colorável.*

Algumas observações elementares sobre o número de coloração:

Um grafo G de ordem n é k -colorável para todo o $k \geq n$, pelo que $\chi(G) \leq n$.

$\chi(G) = \max\{\chi(H) : H \text{ componente conexa de } G\}$.

O único (a menos de isomorfismo) grafo de ordem n com número de coloração n é o grafo completo K_n .

$\chi(G) = 1$ se e só se G não tem arestas; $\chi(G) = 2$ se e só se G é **bipartido**, ou seja, se existe uma partição dos vértices de G ,

$$V = X \cup Y; X \cap Y = \emptyset$$

tal que toda a aresta de G incide num vértice $x \in X$ e noutro vértice $y \in Y$. Em particular, as árvores bem como os ciclos de comprimento par têm número de coloração 2.

Os ciclos de comprimento ímpar têm número de coloração 3.

Provar que $\chi(G) \leq k$ é equivalente a determinar uma partição dos vértices

$$V = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k; X_i \cap X_j = \emptyset \forall i \neq j$$

em conjuntos **estáveis**, ou seja, tal que para qualquer $i \leq k$ e para quaisquer vértices $u, v \in X_i$, u e v não são adjacentes. Vamos designar uma partição deste tipo uma **partição estável**.

Um caso particularmente simples é o dos grafos com $\chi(G) = 2$, ou seja os grafos cujos vértices são a união disjunta de dois conjuntos estáveis, que como referimos são designados **grafos bipartidos**.

Esses grafos podem ser identificados por uma outra propriedade:

Proposição 1.3 *Um grafo simples é bipartido se e só se não contém ciclos (caminhos fechados) de comprimento ímpar.*

Demonstração 1.4 *Suponhamos que G um grafo bipartido com decomposição $V_G = X \cup Y$; $X \cap Y = \emptyset$ do conjunto de vértices em conjuntos estáveis. Um ciclo é então forçosamente determinado por uma sequência de vértices*

$$x_1, y_1, x_2, \dots, x_j, y_j$$

onde $x_i \in X$ e $y_i \in Y$, e tem portanto comprimento par $2j$.

Reciprocamente, suponhamos que G não contém ciclos de comprimento ímpar. Notamos que basta provar que cada componente conexa de G é um grafo bipartido, ou seja, basta provar a implicação para grafos conexos. Escolhemos um vértice qualquer x e definimos dois subconjuntos de vértices

$$X = \{v \in V_G : \text{dist}(x, v) \equiv 0 \pmod{2}\}, \quad Y = \{v \in V_G : \text{dist}(x, v) \equiv 1 \pmod{2}\},$$

onde $\text{dist}(,)$ designa a distância entre os vértices.

É claro que V_G é a união disjunta de X e Y , uma vez que G é conexo. Resta verificar que cada um desses conjuntos é independente, isto é, que quaisquer vértices $u, v \in X$ (respectivamente $u, v \in Y$) são não adjacentes.

Suponhamos que $u, v \in X$ são adjacentes pela aresta a ; existe um caminho C_1 de comprimento $2j$ entre x e u e um caminho C_2 de comprimento $2k$ entre v e x ; o passeio fechado C_1, a, C_2 tem portanto comprimento ímpar e cada

aresta nele contida é percorrida ou 1 ou 2 vezes; se eliminarmos nesse passeio as arestas percorridas 2 vezes, ficamos com uma união de ciclos (alguns dos quais podem ter comprimento 0, ou seja, serem vértices isolados) dos quais pelo menos um tem comprimento ímpar.

1.1 Relação com outros parâmetros

Um minorante óbvio para o número de coloração de um grafo é dado por $\omega(G)$, que é a ordem do maior grafo completo que é subgrafo de G (também designado o maior clique de G).

Por outro lado temos também $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, onde

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \subset V \text{ é estável}\}.$$

Isso decorre de que nenhum dos conjuntos monocromáticos de vértices X_i pode ter mais do que $\alpha(G)$ elementos; logo,

$$|V| = \sum_{i \leq k} |X_i| \leq \alpha(G)k$$

1.2 Algoritmo ganancioso

Um **algoritmo** simples para colorir um grafo segue a estratégia "gananciosa": Dada uma lista de cores c_1, c_2, \dots e com os vértices ordenados v_1, \dots, v_n , colorimos cada vértice por ordem usando a primeira cor que ainda não foi usada em nenhum vértice adjacente a ele.

Naturalmente, o resultado depende da ordem dos vértices e embora exista sempre uma ordem que conduz a uma coloração ótima (exercício), é em geral difícil determinar essa ordem antecipadamente.

Exemplo 1.5 Dado $m > 1$, seja G o grafo bipartido com vértices $V_G = X \cup Y$ onde

$$X = \{x_1, \dots, x_m\} \quad Y = \{y_1, \dots, y_m\}$$

e arestas (x_i, y_j) para todos os $1 \leq i, j \leq m$ tais que $i \neq j$.

Se tomarmos os vértices na ordem $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$ o algoritmo ganancioso dá uma coloração com duas cores e de facto $\chi(G) = 2$.

Mas se a ordem for $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ o algoritmo ganancioso produz uma coloração com m cores.

Entretanto, a análise deste algoritmo permite mostrar que

Proposição 1.6 : Se G é um grafo conexo, simples, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ onde $\Delta(G)$ designa o máximo dos graus dos vértices de G .

Demonstração 1.7 De facto, se colorirmos G seguindo a estratégia do algoritmo descrito atrás (para uma ordem qualquer dos vértices) com $\Delta + 1$ cores, quando chegamos a um vértice v , no pior dos casos ele terá Δ vértices adjacentes, todos coloridos com cores diferentes, e mesmo nesse caso ainda temos uma cor disponível.

Pode-se provar um pouco mais:

Teorema 1.8 (Brooks): Se G é um grafo conexo que não é um grafo completo nem um ciclo de ordem ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

A aplicação do algoritmo ganancioso mostra que o importante não é tanto o grau do vértice a colorir mas sim o número de vértices adjacentes já coloridos. Essa ideia está na base de um refinamento que podemos introduzir no algoritmo ganancioso, estabelecendo um critério para a ordenação dos vértices, e que permite deduzir uma proposição que pode dar uma melhor majoração para o número de coloração.

Seja n a ordem de G . Fazemos uma ordenação dos vértices de G que passa por considerar uma sucessão de subgrafos induzidos. Designamos $G_0 = G$ e começamos por escolher um vértice v_1 de grau $\delta(G_0)$; no subgrafo $G_1 = G_0 - \{v_1\}$, escolhemos de novo um vértice v_2 de grau $\delta(G_1)$, e assim por diante: em cada passo temos um subgrafo induzido G_k , escolhemos nele um vértice v_{k+1} de grau mínimo e definimos $G_{k+1} = G_k - \{v_{k+1}\}$, até esgotarmos todos os vértices.

Colorimos os vértices de G aplicando o algoritmo ganancioso à ordem inversa

$$v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1;$$

notamos que, nesta ordem, cada vértice v_k é adjacente a no máximo $\delta(G_{k-1})$ vértices *que o precedem na ordem*; se $d = \max\{\delta(G_k) : 0 \leq k < n\}$, podemos colorir G com $d + 1$ cores, uma vez que quando vamos colorir o vértice v_k , no pior dos casos existirão d vértices adjacentes já coloridos, e portanto existe decerto uma cor disponível.

A estimativa para $\chi(G)$ assim obtida depende certamente das sucessivas escolhas de vértices de grau mínimo nos subgrafos induzidos. Em qualquer caso, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.9 : *Seja G um grafo simples e defina-se*

$$d = \max\{\delta(H) : H \text{ subgrafo induzido de } G\}$$

. Então tem-se $\chi(G) \leq d + 1$.

Existem diversas variantes desta ideia que conduzem a outros tantos resultados sobre a majoração de $\chi(G)$. Mas não existe qualquer fórmula simples nem um algoritmo que determine $\chi(G)$ em tempo polinomial.

Exercícios XI.1

1. Mostrar que um grafo G tem sempre pelo menos $\binom{\chi(G)}{2}$ arestas.
2. Mostrar que é possível ordenar os vértices de um grafo G de modo a que o algoritmo ganancioso de coloração use apenas $\chi(G)$ cores.

3. Seja G um grafo (simples) com vértices V . $S \subset V$ chama-se um conjunto estável se quaisquer dois vértices $u, v \in S$ não são adjacentes. $S \subset V$ chama-se uma cobertura de G se cada aresta de G incide em algum $v \in S$. Definem-se

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \subset V \text{ é um conjunto estável}\}$$

$$\beta(G) = \min\{|S| : S \subset V \text{ é uma cobertura de } G\}$$

Mostrar que $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

4. Mostrar que dado um grafo de ordem n

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

onde $\alpha(G)$ designa o número máximo de vértices num conjunto estável.

5. Seja G um grafo com $\chi(G) = k$ e

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

uma partição dos vértices em conjuntos estáveis, um para cada cor. Mostrar que para cada $i \leq k$ existe algum $v \in V_i$ que tem vértices adjacentes de todas as outras cores. Em particular, G tem que conter pelo menos k vértices de grau maior ou igual a $k - 1$.

Sugestão: analisar a negação da afirmação contida no enunciado.

6. Mostrar que se G tem sequência de graus $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, então

$$\chi(G) \leq \max\{\min(d_i + 1, i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

7. Dados grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices V , definimos $G \vee H$ como sendo o grafo com vértices V e em que $u, v \in V$ são adjacentes se e só se o são em G ou em H (ou em ambos).

- a) Mostrar que

$$\chi(G \vee H) \leq \chi(G)\chi(H).$$

Concluir que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

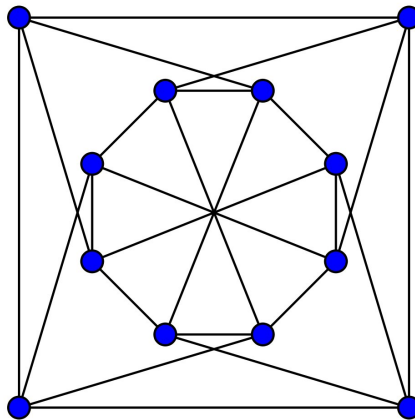
b) Mostrar que $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

Sugestão para a segunda desigualdade da alínea b): usar a desigualdade do exercício anterior.

8. Dados inteiros r e t com $2r \leq t$, define-se o grafo de Kneser $Kn(r, t)$ do seguinte modo: os vértices são os subconjuntos de $[t] = \{1, 2, \dots, t\}$ com r elementos; dois vértices são adjacentes se são disjuntos. Mostrar que $\chi(Kn(r, t)) \leq t - 2r + 2$.

Sugestão: indução.

9. Determinar o número de coloração do grafo de Chvátal representado na figura.



1.3 Coloração de grafos planares.

Um caso especial que merece menção é o dos grafos planares. Um dos problemas mais famosos de coloração de grafos foi o da demonstração de que qualquer mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores. Isso é equivalente à afirmação de que qualquer grafo planar simples é 4-colorável.

Embora as demonstrações existentes até hoje deste resultado dependam fortemente de um grande número de verificações só possíveis com a utilização

de computadores, é muito fácil mostrar que um grafo planar simples é 6-colorável:

Uma consequência imediata da fórmula de Euler para grafos planares conexos simples $v - a + f = 2$, é que o grau mínimo $\delta(G)$ de um grafo planar simples é menor ou igual a 5: de facto, como vimos, $a \leq 3v - 6$, e portanto

$$\delta(G)n \leq \sum_{v \in V_G} d(v) = 2a \leq 6v - 12.$$

Como isso continua a ser verdade para qualquer subgrafo, a proposição anterior garante que G pode ser colorido com 6 cores.

Com um pouco mais de trabalho prova-se o seguinte:

Proposição 1.10 *Um grafo planar, sem lacetes, é 5-colorável.*

Demonstração 1.11 *Por indução no número de vértices do grafo. O caso $n = 1$ (e de facto os casos $n \leq 5$) são evidentes. Suponhamos portanto como hipótese de indução que todos os grafos planares sem lacetes, com menos do que n vértices são 5-coloráveis, e seja G um grafo nas mesmas condições, com n vértices.*

Sabemos que existe pelo menos um vértice x com grau menor ou igual a 5. Usando a hipótese de indução, colorimos com 5 cores o grafo $G - \{x\}$.

Se $d(x) < 5$ ou $d(x) = 5$ mas os vértices adjacentes a x não usam as cinco cores, podemos sempre completar a coloração. Basta portanto considerar o caso em que os vértices adjacentes ao vértice x que queremos colorir, estão coloridos com 5 cores; sem perda de generalidade, podemos supôr, para simplificar a descrição, que as cores 1, 2, 3, 4, 5 estão a colorir, nesta ordem, os vértices adjacentes a x que o rodeiam no sentido dos ponteiros do relógio, numa certa representação planar do grafo.

Consideramos agora o subgrafo de G induzido pelos vértices de cor 1 ou 3; se os vértices x_1 e x_3 , adjacentes a x e coloridos, respectivamente, com as

cores 1 e 3, estão em componentes conexas diferentes deste subgrafo, podemos trocar as cores 1 e 3 numa dessas componentes, sem violar a regra de não termos vértices adjacentes com a mesma cor; nesse caso, por exemplo o vértice x_3 passa a ter a cor 1 e a cor 3 fica disponível para x .

Caso contrário, concluímos que existe um caminho em G , com início em x_1 e fim em x_3 , com cores 1 e 3 alternadas. Na nossa representação plana, esse caminho limita uma união de faces, arestas e vértices de G , contendo por exemplo o vértice x_2 , colorido com a cor 2; mas então podemos trocar a cor 2 com por exemplo a cor 4 nos vértices que ficam no interior daquele caminho, deixando a cor 2 disponível para x .

1.4 Polinómio de coloração.

Uma abordagem algo diferente ao problema da coloração de grafos consiste em, dado um grafo G e k cores, procurar determinar quantas colorações diferentes de G com essas cores existem, onde duas colorações são consideradas diferentes se existe pelo menos um vértice que não tem a mesma cor nas duas colorações. Não é obrigatório usar todas as k cores numa coloração.

Designemos esse número por $p(G, k)$. É claro que o menor k para o qual $p(G, k) > 0$ é precisamente $\chi(G)$.

Se G não tem arestas, cada um dos seus n vértices pode ser colorido com qualquer uma das k cores, logo nesse caso $p(G, k) = k^n$; por outro lado se G é um grafo completo, todos os vértices têm que ter uma cor diferente e $p(K_n, k) = k(k-1) \cdots (k-n+1) = n! \binom{k}{n}$.

Existe uma fórmula de recorrência para os números $p(G, k)$; recorde-se que dada uma aresta a de G , $G \setminus a$ é o grafo que se obtém eliminando a em G , e G/a é o grafo que se obtém eliminando a e identificando os vértices incidentes um com o outro. Como se referiu atrás, para o efeito de contar colorações

podemos identificar igualmente as arestas paralelas que possam ser criadas. Tem-se então

$$p(G, k) = p(G \setminus a, k) - p(G/a, k)$$

De facto, uma k -coloração de G é igualmente uma k -coloração de $G \setminus a$; por outro lado, uma k -coloração de $G \setminus a$ não induz uma k -coloração de G exactamente se os vértices incidentes a a tiverem a mesma cor, e isso acontece se e só se ela é também uma k -coloração de G/a .

Verifica-se que, para um grafo G fixo, $p(G, k)$ é um polinómio na variável k , o polinómio de coloração de G , que se determina por aplicação da fórmula de recorrência:

Teorema 1.12 : *Dado um grafo sem lacetes G de ordem n , existe um polinómio $p(G, x)$ tal que $p(G, k)$ é o número de colorações de G que se podem fazer usando (algumas das) cores $1, 2, \dots, k$. Além disso, se G é simples e a é uma aresta de G , então*

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

O polinómio $p(G, x)$ tem grau n , coeficientes inteiros com sinal alternado, termo principal x^n e termo constante nulo.

Demonstração 1.13 *A demonstração é por indução no número m de arestas de G : se $m = 0$ então $p(G, x) = x^n$. Se $m > 0$ e G não for simples definimos $p(G, x) = p(H, x)$ onde H é o grafo simples associado (que tem menos arestas e portanto está definido por hipótese de indução). Suponhamos então que G é simples; escolhida uma aresta a , ambos os grafos $G \setminus a$ e G/a têm $m - 1$ arestas e não têm lacetes. Pela hipótese de indução existem polinómios*

$$p(G \setminus a, x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i x^i, \quad p(G/a, x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i-1} b_i x^i$$

satisfazendo as hipóteses do teorema.

Definimos

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

que se verifica ter as propriedades do enunciado.

Note-se que a recursão pode ser usada quer na forma

$$p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$$

para chegar eventualmente a uma combinação linear de polinómios cromáticos de grafos triviais (sem arestas), quer na forma

$$p(G \setminus a, x) = p(G, x) + p(G/a, x)$$

para chegar eventualmente a uma combinação linear de polinómios cromáticos de grafos completos.

Também é útil para a aplicação da recorrência notar que se G tem, por exemplo, componentes conexas G_1 e G_2 ,

$$p(G, x) = p(G_1, x)p(G_2, x).$$

O exemplo seguinte ilustra estas observações

EXEMPLO DE CÁLCULO DE $p(G, x)$

$$\begin{aligned} p(\text{Graph 1}, x) &= p(\text{Graph 2}, x) - p(\text{Graph 3}, x) \\ &= p(\text{Graph 4}, x) - p(\text{Graph 5}, x) - p(\text{Graph 6}, x) = \\ &= (x-2) p(\text{Graph 7}, x) = \\ &= (x-2) \left[p(\text{Graph 8}, x) + p(\text{Graph 9}, x) \right] = \\ &= (x-2) \left[x(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-1)(x-2) \right] = \\ &= x(x-1)(x-2)^3 \end{aligned}$$

Em PARTICULAR, $\chi(\text{Graph 1}) = 3$

E EXISTEM 6 COLORAÇÕES COM 3 CORES.

Exercícios XI.2

1. Completar a demonstração das propriedades do polinómio de coloração, mostrando que, se G tem m arestas e k componentes conexas, e

$$p(G, x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} a_i x^i$$

é o seu polinómio de coloração, então

$$a_{n-1} = m; \quad a_i = 0 \quad \forall i < n - k.$$

2. Determinar o polinómio de coloração de uma árvore com n vértices.
3. Determinar o polinómio de coloração do grafo $K_{3,3}$.
4. Seja G um grafo simples e $a \in E_G$ uma **aresta de corte**, ou seja, tal que $G \setminus a$ tem mais uma componente conexa que G : se a incide nos vértices u e v , $G \setminus a$ é a união disjunta de grafos G_1 e G_2 , tal que $u \in V_{G_1}$ e $v \in V_{G_2}$.
noindent Mostrar que

$$p(G, x) = \frac{x-1}{x} p(G \setminus a, x).$$

5. Dado um grafo simples G com n vértices, seja $m_G(r)$ o número de partições estáveis de V_G com r conjuntos estáveis. Mostrar que

$$p(G, x) = \sum_{k=1}^n m_G(k) x^{\underline{k}},$$

onde $x^{\underline{k}} = x(x-1) \cdots (x-k+1)$.

Deduzir uma outra demonstração de que $a_{n-1} = m$, o número de arestas de G .

1.5 O Teorema de Turán

Como vimos, um grafo é p -colorável, se existe uma partição do conjunto dos vértices $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$ satisfazendo as condições

$$\forall i \leq p \ V_i \neq \emptyset \text{ é um conjunto estável ;}$$

$$\forall i \neq j, V_i \cap V_j = \emptyset$$

Um grafo (simples) onde exista uma partição deste tipo chama-se p -partido. Obviamente os grafos p -partidos são o exemplo mais simples de grafos que não contêm K_{p+1} como subgrafo.

Vamos agora abordar o problema de outro modo, procurando determinar qual o número máximo de arestas de um grafo p -partido. À semelhança de definições anteriores, um grafo p -partido diz-se completo se para qualquer par de índices $1 \leq i, j \leq p$, se tem

$$i \neq j \implies u \text{ adjacente a } v, \forall u \in V_i, v \in V_j$$

ou seja se tiver o maior número possível de arestas.

Seja G um grafo p -partido completo e V_1, V_2 dois dos conjuntos estáveis; suponhamos que $|V_1| = m$ e $|V_2| = m + j$ com $j > 1$; o número de arestas entre estes dois conjuntos de vértices é evidentemente $m(m + j)$; mas se mudarmos um vértice v de V_2 para V_1 , eliminando as arestas que uniam v a vértices de V_1 mas criando uma nova aresta entre v e u para cada vértice u que ficou em V_2 , verificamos que perdemos m arestas por um lado mas ganhamos $m + j - 1$ arestas por outro, ou seja, aumentamos o número total de arestas do grafo, mantendo a propriedade de este ser p -partido.

Concluimos portanto que para obter um grafo de ordem n , p -partido e com o maior número possível de arestas, devemos repartir os vértices em conjuntos tão equilibrados quanto possível; dividindo n por p , se $n = tp + r$, com $0 \leq r < p$, temos $n = t(p - r) + (t + 1)r$ e podemos repartir os vértices em $p - r$ conjuntos com t vértices cada e r conjuntos com $t + 1$ vértices cada.

Se estes conjuntos forem estáveis e existirem todas as arestas entre vértices de conjuntos diferentes, obtemos um grafo $T_{p,n}$, chamado grafo de Turán, cujo número de arestas é

$$a(n, p) = \frac{(p-1)n^2 - r(p-r)}{2p}.$$

A dedução desta fórmula para o número de arestas é deixada como exercício. Completamos a definição, pondo $T_{p,n} = K_n$ se $n < p$, caso em que não é possível termos um grafo p -partido de ordem n . Note-se aliás que para $n \leq p$, temos sempre $a(n, p) = \binom{n}{2}$ o que justifica a extensão da definição (que corresponde a partir o conjunto dos vértices em n conjuntos com um vértice e $p - n$ conjuntos com zero vértices).

Nota 1.14 *Note-se que o raciocínio anterior mostrou que $T_{p,n}$ é, a menos de isomorfismo, o único grafo p -partido com n vértices e número máximo de arestas.*

O seguinte teorema, devido a Turán diz-nos que os grafos $T_{p,n}$ são não apenas exemplos de grafos em n vértices que não contêm K_{p+1} como subgrafo, mas constituem os casos extremos de grafos nessas condições:

Teorema 1.15 (Turán) : *Se G é um grafo simples de ordem n que não contém K_{p+1} como subgrafo, então G tem no máximo $a(n, p)$ arestas e este máximo é atingido se e só se G é isomorfo a $T_{p,n}$.*

Demonstração 1.16 : *Fazemos a prova por indução em p . O resultado é trivial para $p = 2$ uma vez que nesse caso G não tem arestas.*

Pomos como hipótese de indução que para qualquer inteiro $j < p$ e qualquer n , um grafo com n vértices e não contendo K_j como subgrafo, tem no máximo $a(n, j-1)$ arestas e este máximo é atingido se e só se G é isomorfo a $T_{j-1,n}$. Seja então G um grafo com n vértices que não contém K_p como subgrafo.

Escolhemos um vértice x de grau máximo Δ e designamos por Y o conjunto dos vértices adjacentes a x e por X o seu complementar (que inclui o próprio x).

Notamos que as arestas de G se podem decompor em arestas de $G[X]$ (o subgrafo induzido por esse conjunto de vértices), arestas de $G[Y]$, e arestas do subgrafo bipartido $G[X, Y]$.

Por um lado, $G[Y]$ não pode conter K_{p-1} como subgrafo (caso contrário teríamos, juntando x e as suas arestas, uma cópia de K_p). Portanto, pela hipótese de indução, o número de arestas de $G[Y]$ é menor ou igual a $a(\Delta, p-2)$ com igualdade se e só se $G[Y]$ é isomorfo a $T_{p-2, \Delta}$.

As restantes arestas não podem ser mais do que $(n - \Delta)\Delta$, uma vez que cada um dos $n - \Delta$ vértices de X tem grau menor ou igual a Δ . Além disso, se $u, v \in X$ forem adjacentes, então têm que existir vértices $u', v' \in Y$ (não necessariamente distintos) tais que nem u e u' nem v e v' são adjacentes. O grafo que se obtém de G eliminando a aresta uv e criando as arestas uu' e vv' tem mais uma aresta que G . Portanto o número de arestas incidentes em vértices de X atinge aquele valor máximo exactamente se X for um conjunto estável (ou seja, se $G[X]$ não tiver arestas) e cada um dos seus $n - \Delta$ vértices for adjacente a cada um dos Δ vértices de Y .

Em conclusão, o número de arestas de G é menor ou igual ao do grafo H com os mesmos vértices $X \cup Y$, onde o subgrafo induzido $H[Y]$ é uma cópia de $T_{p-2, \Delta}$, Y é um conjunto estável e x e y são adjacentes, para todos os $x \in X$ e $y \in Y$. Além disso, o número de arestas atinge esse valor máximo se e só se G e H forem isomorfos.

Mas este grafo H é um grafo $(p-1)$ -partido com n vértices e portanto, como vimos na discussão que levou à definição dos grafos de Turán, o seu número de arestas satisfaz $|E_H| \leq a(n, p-1) = |E_{T_{p-1, n}}|$ sendo que a igualdade se verifica exactamente se H for isomorfo a $T_{p-1, n}$.

Juntando estas duas conclusões obtemos o resultado que queríamos provar.

O teorema anterior e o método da sua demonstração implicam a seguinte proposição-algoritmo, cuja demonstração se deixa como exercício.:

Proposição 1.17 *Se G é um grafo simples com n vértices e mais do que $a(n, p - 1)$ arestas, então G contém um subgrafo isomorfo a K_p que pode ser encontrado do seguinte modo: escolhemos um vértice v_1 de grau máximo; em seguida escolhemos um vértice v_2 de grau máximo no subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices adjacentes a v_1 , e assim por diante até ficarmos com um único vértice v_p .*

O conjunto v_1, v_2, \dots, v_p constitui um clique de ordem p em G .

O Teorema de Turán pode ser usado para demonstrar resultados noutras áreas. Um bom exemplo é o seguinte: se $S \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto de n pontos com diâmetro 1, ou seja,

$$\max\{\|x - y\| : x, y \in S\} = 1$$

então existem no máximo $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pares de pontos $x, y \in S$ para os quais $\|x - y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Esse facto pode ser justificado mostrando, por um argumento geométrico, que não podem existir 4 pontos de S tais que a distância entre quaisquer dois deles seja maior que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Consideramos então o grafo G cujos vértices são os pontos de S e em que x, y são adjacentes se $\|x - y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$; a conclusão anterior implica que G não contém K_4 como subgrafo. Pelo Teorema de Turán, G tem no máximo $a(n, 3) = \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ arestas.

Aquele majorante é de facto óptimo: para todo o $n > 1$ existe um conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ de n pontos em que há exactamente $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pares de pontos $x, y \in S$ para os quais $\|x - y\| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nota 1.18 *Os exemplos mais simples podem levar à convicção de que os parâmetros $\chi(G)$ (número de coloração) e $\omega(G)$ (maior subgrafo completo) têm sempre valores próximos. Isso é falso: de facto, dados quaisquer m e k , existem grafos G com $\chi(G) \geq k$ e em que o comprimento do menor ciclo (a chamada cintura do grafo) é $\geq m$ (e portanto, em particular, $\omega(G) = 2!$).*

O Teorema de Turán exemplifica um ponto de vista central em Teoria de Grafos, a chamada Teoria extremal: um problema típico é o de identificar qual o número máximo de arestas de um grafo G com n vértices que tenha uma determinada propriedade, e determinar os grafos que atingem esse valor máximo. O Teorema de Turán resolve este problema para a propriedade de não conter K_p como subgrafo.