1 Problemas para a aula de 08/10

- Dado um conjunto X mostrar que

  a) existe uma bijecção entre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ dos subconjuntos de X e o conjunto $\{f : X \to \{0,1\}\}$ das funções com domínio X e contradomínio $\{0,1\}$.

  b) não existe uma função $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$ sobrejectiva.
  Sugestão: dada uma função qualquer $\phi : X \to \mathcal{P}(X)$, considerar o conjunto $Y = \{x \in X | x \notin \phi(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.
  Supondo que este conjunto pertence à imagem de ϕ, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $\phi(x_0) = Y$, será que $x_0 \in Y$?

- "Adivinhar", calculando os primeiros casos, uma fórmula para a soma

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

  e demonstrá-la.

- O jogo das Torres de Hanoi consiste no seguinte: existem três casas e uma pilha de n discos, de tamanhos decrescentes da base para o topo, na primeira casa; pretende-se mover a pilha para a terceira casa, cumprindo as seguintes regras: só se pode mover um disco de cada vez; não se podem colocar discos maiores sobre discos menores.
  Qual é o menor número de movimentos (dependente de n, claro) necessário para terminar o jogo?

- Demonstrar que, para todo o $n \geq 1$,

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

- Mostrar que é possível colorir com duas cores as regiões planas definidas por n circunferências, de modo a que regiões com um arco de fronteira comum tenham cores diferentes.

- Mostrar que, dados n quadrados, é possível recortá-los em polígonos de modo a formar com estes um novo quadrado.
  Sugestão: O único caso difícil é $n = 2$.

- Calcular $d = mdc(a, b)$ e determinar os $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $d = ax + by$ nos casos seguintes:

  a) $a = 721$ $\quad b = 448$

  b) $a = 341$ $\quad b = 209$

  c) $a = 2163$ $\quad b = 922$

- Mostrar que, dado um natural $a > 1$, se verifica

$$mdc\,(a^m - 1, a^n - 1) = a^{mdc(m,n)} - 1$$

  Sugestão: verificar que se $m = qn + r$, com $0 \leq r < n$, então

$$a^m - 1 = a^r(1 + a^n + \cdots + a^{(q-1)n})(a^n - 1) + a^r - 1$$

- Sejam $a_0, a_1, \cdots, a_n$ inteiros e $x = \dfrac{r}{s}$ um número racional (com $mdc(r, s) = 1$) tal que

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

  Mostrar que $s \mid a_n$ e $r \mid a_0$.