1 Problemas sobre o Princípio de Inclusão- Exclusão

1.1 Desarranjos

Quantas permutações π de $\{1, \cdots, n\}$ satisfazem $\pi(i) \neq i \ \forall i$? Estas permutações são também designadas desarranjos.

$$X_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}; \qquad |X_{i_1} \cap \cdots X_{i_j}| = (n-j)!$$

$$n! - |\cup_i X_i| = n! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)!$$

$$= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Como $e^a = \sum_{j\geq 0} \frac{a^j}{j!}$, concluímos que, para n grande a proporção de desarranjos no conjunto de todas as permutações é aproximadamente e^{-1}.
Naturalmente, esta afirmação pode (e deve...) ser feita mais precisa: dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que se $n > N$ então a proporção de desarranjos no conjunto de todas as permutações está no intervalo $]e^{-1} - \varepsilon, e^{-1} + \varepsilon[$. E é possível estimar N em função de ε.

1.2 Sequências $x_1 \cdots x_8$ de vogais sem UAU

Seja X_i o conjunto das sequências com **UAU** a começar na posição $1 \leq i \leq 6$.

Temos $|X_i| = 5^5$, e

$|X_1 \cap X_4| = |X_1 \cap X_5| = |X_1 \cap X_6| = |X_2 \cap X_5| = |X_2 \cap X_6| = |X_3 \cap X_6| = 5^2$,

$$|X_1 \cap X_3| = |X_2 \cap X_4| = |X_3 \cap X_5| = |X_4 \cap X_6| = 5^{3,}$$

e ainda

$$|X_1 \cap X_3 \cap X_6| = |X_1 \cap X_4 \cap X_6| = 1 \qquad |X_1 \cap X_3 \cap X_5| = |X_2 \cap X_4 \cap X_6| = 5$$

Aplicando o Princípio de Inclusão-Exclusão, o número de sequências pretendido é

$$5^8 - 6 \times 5^5 + (6 \times 5^2 + 4 \times 5^3) - (2 \times 1 + 2 \times 5).$$

Esta dedução é claramente menos satisfatória do que a que feita noutros problemas, porque o número de elementos das intersecções $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}$ não depende só de j mas também dos conjuntos considerados em cada caso.
No problema seguinte vamos usar, num problema ligeiramente diferente, uma outra forma de aplicação do Princípio de Inclusão-Exclusão, e depois veremos como a usar neste exemplo.

1.3 Sequências $x_1 \cdots x_n$ de vogais sem o bloco AEIOU

Seja X_k o conjunto das sequências com exactamente k AEIOU;

definindo $m = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$, queremos $| \cup_{k=1}^{m} X_k| = \sum_{k=1}^{m} |X_k|$.

Seja Y_j o conjunto de sequências construídas usando j blocos AEIOU. Note-se que Y_j não conta as sequências que têm pelo menos j blocos AEIOU, mas o número de maneiras de as construir usando esses blocos como se fossem letras. Temos

$$|Y_j| = 5^{n-5j} \binom{j+n-5j}{j}$$

Em $|Y_j|$, cada sequência de X_k é contada $\binom{k}{j}$ vezes. Logo

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} |Y_j| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \sum_{k=j}^{m} \binom{k}{j} |X_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |X_k| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} = \sum_{k=1}^{m} |X_k|$$

Ou seja

$$\sum_{k=1}^{m} |X_k| = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \binom{n-4j}{j} 5^{n-5j}.$$

1.4 Sequências $x_1 \cdots x_8$ de vogais sem UAU

Usando a ideia anterior, definimos Y_j comoo conjunto das sequências construídas usando blocos com j **UAU**. $|Y_1| = 6 \times 5^5$; para $j > 1$ temos o problema já identificado de termos que considerar vários blocos diferentes: para $j = 2$, podemos usar dois blocos **UAU** para construir sequências de $5^2\binom{2+2}{2}$ maneiras, ou um bloco **UAUAU** ($5^3 \times 4$ construções). Portanto

$$|Y_2| = \binom{4}{2} \times 5^2 + 4 \times 5^3.$$

Para $j = 3$ temos os casos

- um bloco **UAU** e um **UAUAU**: 2 construções;

- um bloco **UAUAUAU**: 2×5 construções.

Assim o número de sequências sem **UAU** é

$$5^8 - \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} |Y_j| = 5^8 - 6 \times 5^5 + (\binom{4}{2} \times 5^2 + 4 \times 5^3) - (2 + 2 \times 5),$$

como já tínhamos visto.

Embora esta abordagem permita identificar os casos a considerar de maneira mais clara do que a enumeração sistemática da primeira solução, a sua generalização para $n > 8$ exige que estudemos o problema de enumerar as maneiras de formar blocos contendo k **UAU**.

1.5 Sentar n casais numa mesa

Este é um problema clássico de enumeração: pretendemos sentar n casais numa mesa redonda com a condição de nenhum casal ficar lado a lado. Obviamente, designando por X_i o conjunto das distribuições das pessoas pelos lugares em que o casal i fica junto, queremos calcular

$$(2n-1)! - |\cup_{i=1}^{n} X_i|.$$

Fixando um conjunto de j casais, temos que calcular $|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_j}|$; podemos sentar as $2n-2j$ pesoas restantes, de $(2n-2j-1)!$ maneiras e distribuir entre elas j pares de cadeiras, de $\binom{j+2n-2j-1}{j}$ maneiras, e, finalmente, sentar os j casais, de $j!2^j$ maneiras nessas cadeiras.
O resultado é

$$(2n-2j-1)!\binom{j+2n-2j-1}{j} j!2^j = (2n-j-1)!2^j.$$

Podíamos ter chegado a esta expressão mais simples vendo que o problema pode ser visto como o de sentar $2n-j$ "pessoas" numa mesa redonda (em que j delas são de facto casais) e escolher a ordem de cada casal.

A resposta é portanto

$$(2n-1)! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (2n-j-1)!2^j = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (2n-j-1)!2^j.$$

Uma variante que se deixa para discussão consiste em sentar os n casais sem que nenhum casal fique lado a lado e ficando os homens e as mulheres intercalados.