0.1 A Teoria de Ramsey

Recordemos que um *clique* de um grafo G é um subgrafo completo, ou seja um conjunto de vértices adjacentes dois a dois, e que ωG é definido como o maior inteiro m tal que G contém um clique com m vértices.
Como se viu, se um subconjunto de vértices S constitui um clique de um grafo G então S é um conjunto estável do grafo complementar $\overline{G}$ e vice-versa.

É natural supôr que se um grafo G não contém um conjunto estável "grande" então poderá ter um clique "grande". Esta relação entre cliques e conjuntos independentes de um grafo (ou, de modo equivalente, entre cliques de G e de $\overline{G}$) pode ser descrito em termos de colorações com duas cores (vermelho e azul) das arestas de grafos completos: podemos identificar G com o grafo cujas arestas são vermelhas e portanto $\overline{G}$ com o grafo cujas arestas são azuis.

Um exemplo elementar daquela relação é o problema seguinte, incluído numa Ficha de exercícios: dado um grupo de 6 pessoas, existem sempre ou 3 que se conhecem entre si ou 3 que são mutuamente desconhecidas. Associamos ao problema o grafo K_6, cujos vértices identificamos com as pessoas; dados vértices x, y colorimos a aresta entre eles de vermelho se as pessoas correspondentes se conhecem e de azul caso contrário. A conclusão do enunciado traduz-se na afirmação de que de qualquer coloração com duas cores das arestas de K_6 resulta sempre um K_3 com as arestas todas da mesma cor.
Verificamos que é de facto assim: dado um vértice x qualquer, o Princípio do Pombal garante que pelo menos 3 das arestas incidentes em x têm a mesma cor (por exemplo, vermelha); se y_1, y_2, y_3 são os vértices adjacentes a x por essas arestas então, ou existe entre dois deles (por exemplo y_1 e y_2) uma aresta vermelha, e então o subgrafo induzido por x, y_1, y_2 tem as arestas todas vermelhas, ou então todas arestas entre os y_i são azuis, e temos à mesma um K_3 monocromático.
É fácil de verificar que é possível colorir as arestas de K_5 sem criar qualquer K_3 monocromático, pelo que 6 é o menor inteiro com aquela propriedade.

A generalização deste exemplo conduz à seguinte definição:

Definição 0.1 *Dados $p, q > 0$, o número de Ramsey $R(p, q)$ é definido como o menor inteiro m que satisfaz a propriedade seguinte: qualquer coloração das arestas de K_m com duas cores (vermelho e azul) produz necessariamente ou um K_p vermelho ou um K_q azul. Ou seja:*

$$R(p, q) = \min\{m : \forall G \textit{ grafo simples com } |V_G| = m,\, \omega(G) \geq p \vee \alpha(G) \geq q\},$$

ou ainda, de modo equivalente,

$$R(p, q) = \min\{m : \forall G \textit{ grafo simples com } |V_G| = m, \omega G \geq p \vee \omega(\overline{G}) \geq q\}.$$

Nota 0.2 *Os números $R(p, q)$ e o estudo das suas propriedades e aplicações fazem parte de uma disciplina matemática, designada Teoria de Ramsey, em homenagem ao matemático britânico Frank Ramsey (1903-1930).*

Algumas observações elementares:

- podemos trocar as cores e portanto $R(p, q) = R(p, q)$;
- qualquer grafo com pelo menos um vértice contém K_1 como subgrafo, logo, para todos os $p, 1$, $R(p, 1) = R(1, q) = 1$;
- se colorirmos as arestas de K_q de vermelho e azul e se houver pelo menos uma aresta vermelha, temos um K_2 vermelho; caso contrário temos um K_q azul; por outro lado, é possível colorir as arestas de K_{q-1} todas de azul e não temos nem um K_q azul nem um K_2 vermelho; portanto $R(2, q) = q$.

Esta última observação evidencia o tipo de raciocínio envolvido na determinação ou estimativa dos números $R(p, q)$: para provar que $m < R(p, q)$ basta arranjar uma coloração das arestas de K_m que não crie nem um K_p vermelho nem um K_q azul.
Já para provar que $R(p, q) \leq t$, temos que mostrar que *qualquer* coloração das arestas de K_t produz obrigatoriamente ou um K_p vermelho um K_q azul.

Note-se que, à parte os casos simples $R(1, q)$, $R(2, q)$ e o caso $R(3, 3)$, já calculado, podia nã ser óbvio que estes números existam! Mas tem-se o seguinte teorema:

Teorema 0.3 *Os números $R(p, q)$ existem para todos os $p, q > 0$ e satisfazem a seguinte desigualdade*

$$R(p, q) \leq R(p - 1, q) + R(p, q - 1).$$

Além disso, se ambas as parcelas do lado direito forem pares, tem-se a desigualdade estrita.

Demonstração 0.4 *: Fazemos a demonstração seguindo a formulação em termos de colorações das arestas de um grafo completo.*
A demonstração da primeira parte do Teorema consiste na verificação de que qualquer coloração das arestas do grafo completo com $R(p-1, q)+R(p, q-1)$ vértices produz ou um K_p vermelho ou um K_q azul. Isso confirma a existência de $R(p, q)$ e a majoração do enunciado. Os números de Ramsey são assim definidos por uma forma de recursão. Podemos formalizar esse raciocínio como uma prova por indução em $p+q$, sendo o caso $p+q = 2$ trivial: assumimos, como hipótese de indução que os $R(k, l)$ existem e têm a propriedade enunciada, para todos os k, l tais que $k + l < p + q$.
Seja então $m = R(p - 1, q) + R(p, q - 1)$ e v um vértice qualquer de K_m; v tem $R(p - 1, q) + R(p, q - 1) - 1$ arestas incidentes e portanto um dos dois casos tem que se verificar:

- *v tem (pelo menos) $R(p - 1, q)$ arestas incidentes vermelhas;*
- *v tem (pelo menos) $R(p, q - 1)$ arestas incidentes azuis.*

Suponhamos o primeiro caso; os vértices em que incidem essas arestas azuis induzem um subgrafo completo com $R(p - 1, q)$ vértices, que tem que conter, por definição, ou um K_{p-1} vermelho ou um K_q azul. Neste último caso já temos então o que queríamos; no outro, esse K_{p-1} vermelho, juntamente com as arestas vermelhas que o ligam a v, forma um K_p vermelho, mais uma

vez como pretendíamos.
O segundo caso é inteiramente semelhante.

Para provar a última afirmação do enunciado, suponhamos que $R(p-1,q)$ *e* $R(p,q-1)$ *são ambos pares, e tomemos* K_m *com* $m = R(p-1,q)+R(p,q-1)-1$*. Se, para um vértice* v *qualquer, se verificar uma das condições*

- v *tem (pelo menos)* $R(p-1,q)$ *arestas incidentes vermelhas;*
- v *tem (pelo menos)* $R(p,q-1)$ *arestas incidentes azuis.*

a demonstração segue como anteriormente.
A única maneira de isso não acontecer, uma vez que $d(v) = R(p-1,q) + R(p,q-1)-2$*, é* v *ter exactamente* $R(p-1,q)-1$ *arestas incidentes vermelhas, e exactamnte* $R(p,q-1)-1$ *arestas incidentes azuis.*
Ora isso não pode acontecer para todos os vértices: caso contrário, somando o número de arestas azuis incidentes em todos os $R(p-1,q)+R(p,q-1)-1$ *vértices, teríamos que*

$$(R(p,q-1) + R(p-1,q) - 1)(R(p,q-1) - 1)$$

teria que ser o dobro do número de arestas azuis, uma vez que cada uma delas seria contada duas vezes, uma por cada vértice incidente; mas isso é impossível porque aquele número é ímpar.

Exemplo 0.5 *Como* $R(4,2) = 4$ *e* $R(3,3) = 6$ *são ambos pares, concluímos que* $R(4,3) < 4+6$*. Fazendo uma coloração adequada de* K_8 *conclui-se que de facto* $R(4,3) = 9$*: podemos, por exemplo, identificar os vértices de* K_8 *com as classes de congruência módulo 8 e colorir a aresta* $i\,j$ *de vermelho caso* $i - j \equiv 1$ *ou* $4 \mod 8$ *e de azul caso contrário.*
Deixa-se como exercício verificar que com esta coloração não existe nenhum K_4 *vermelho nem* K_3 *azul.*

Exemplo 0.6 *Para determinar* $R(4,4)$ *começamos por notar que* $R(4,4) \leq R(4,3) + R(3,4) = 18$*. Pode-se, de modo semelhante ao exemplo anterior,* *verificar que de facto $R(4,4) = 18$, descobrindo uma coloração das arestas de K_{17} sem nenhum K_4 monocromático: identificamos os vértices de K_{17} com as classes de congruência módulo 17 e colorindo a aresta $i\,j$ de vermelho caso a diferença $i-j$ seja um resíduo quadrático módulo 17 e de azul caso contrário. Tal como no exemplo anterior, a verificação é deixada como exercício.*

A relativa simplicidade das deduções feitas nos exemplos anteriores é muito enganadora: a tabela seguinte contém *todos* os valores exactos de $R(p,q)$ (com $p \leq q$) conhecidos; noutras entradas indicam-se os intervalos nos quais se sabe estar contido o número de Ramsey respectivo. Existem estimativas do mesmo tipo para outros $R(p,q)$ além dos indicados.

	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
3	6	9	14	18	23	28	36	$[40,43]$	$\cdots$
4		18	25	$[35,41]$	$[49,61]$	$\cdots$			
5			$[43,49]$	$\cdots$					
$\vdots$									

Podemos obter uma estimativa simples e nã recursiva para $R(p,q)$:

Proposição 0.7 : *Para todos os $p \geq 2$ e $q \geq 2$, tem-se*

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

Demonstração 0.8 : *Por indução em $p+q$. Os casos $p+q \leq 5$ são de verificação imediata:*

$$R(2,2) = 2 = \binom{2+2-2}{2-1}; \qquad R(2,3) = 3 = \binom{2+3-2}{2-1};$$

Suponhamos então que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

para todos os s e t tais que $s+t<p+q$. Pela desigualdade do Teorema anterior e usando esta hipótese

$$R(p,q) \le R(p-1,q)+R(p,q-1) \le \binom{p-1+q-2}{p-2}+\binom{p+q-1-2}{p-1} = \binom{p+q-2}{p-1}$$

onde a última igualdade é apenas um caso particular da fórmula

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Note-se que, como consequência da majoração obtida nesta Proposição, temos também que

$$R(p,q) \le 2^{p+q-2}$$

e, em particular,

$$R(p,p) \le 2^{2p-2}.$$

Por outro lado, tem-se a seguinte estimativa para os números de Ramsey diagonais $R(p,p)$:

Teorema 0.9 *Para todo o $p \ge 2$,*

$$R(p,p) \ge 2^{p/2}.$$

Demonstração 0.10 *O caso $p=2$ verifica-se directamente, por isso podemos tomar $p \ge 3$. Notamos em primeiro lugar que K_m tem $2^{\binom{m}{2}}$ colorações com duas cores (vermelho e azul, como sempre). Se fixarmos um conjunto de p vértices, existem $2^{\binom{m}{2}-\binom{p}{2}}$ colorações em que o subgrafo K_p induzido por esses vértices é vermelho.*
Como há $\binom{m}{p}$ escolhas para esse conjunto de vértices, o número de colorações de K_m com algum K_p vermelho é certamente menor que

$$\binom{m}{p} 2^{\binom{m}{2}-\binom{p}{2}};$$

esta estimativa é aliás muito grosseira, pois as colorações em que ocorrem, digamos, j K_p vermelhos estão a ser contadas j vezes.

Conclu'imos que a proporção de colorações em que ocorre algum K_p vermelho é menor que

$$\frac{\binom{m}{p}2^{\binom{m}{2}-\binom{p}{2}}}{2^{\binom{m}{2}}} = \binom{m}{p}2^{-\binom{p}{2}} < \frac{m^p}{p!}2^{-\binom{p}{2}};$$

se $m < 2^{p/2}$, essa proporção fica menor que

$$\frac{2^{p^2/2}}{p!}2^{-\frac{p(p-1)}{2}} = \frac{2^{p/2}}{p!} < \frac{1}{2},$$

como se deduz facilmente (por exemplo, por indução).
Como a mesma estimativa vale para colorações com algum K_p azul, temos que concluir que, com a condição $m < 2^{p/2}$, têm que existir colorações de K_m que não têm nenhum K_p monocromático, e portanto $R(p,p) \geq 2^{p/2}$.

O raciocínio feito na demonstração é um exemplo do chamado método probabilístico em teoria dos grafos.

A definição dos números de Ramsey para grafos generaliza-se: Dadas k cores $c_1, \cdots, c_k$, $R(t_1, \cdots, t_k)$ é definido como o menor m tal que qualquer coloração das arestas de K_m com as cores c_i contém ou um K_{t_1} com a cor c_1, ou um K_{t_2} com a cor c_2, etc. Prova-se de modo semelhante ao apresentado acima que estes números existem e satisfazem desigualdades do mesmo tipo. Mas o alcance da ideia fundamental da Teoria de Ramsey é muito mais vasto. Em vez de uma tentativa de explicação, apresentamos, sem pormenores, um outro resultado, aliás anterior à contribuição do próprio Frank Ramsey para a teoria com o seu nome:
Dados inteiros positivos k e r, define-se o número de van der Waerden (em homenagem ao matemático holandês Bartel Leendert van der Waerden) $w(k,r)$ como o menor m tal que qualquer coloração dos inteiros $1, 2, \cdots, m$ com r cores contém uma progressão aritmética de comprimento k monocromática. Prova-se que estes números existem de facto mas, se excluirmos os casos triviais $k \leq 2$, os únicos valores exactos conhecidos são

$$w(3,2) = 9,\ w(3,3) = 27,\ w(3,4) = 76,\ w(4,2) = 35,\ w(4,3) = 293,\ w(5,2) = 178$$

Para dar uma ideia da dificuldade da determinação dos números de van der Waerden, o matemático inglês Timothy Gowers provou, em 2011, a seguinte estimativa

$$w(k,r) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}$$