Elementos de Matemática Finita

Problemas para revisão

1. Determinar as soluções da equação:

$$156x \equiv 20 \mod 124.$$

2. Determinar os algarismos das unidades e das dezenas de 19^{82}.

3. Sabendo que 3 é raiz primitiva módulo 31 e que $3^{12} \equiv 8 \mod 31$, determinar as soluções da equação

$$27x^{48} + 1 \equiv 0 \mod 31.$$

4. a) Demonstrar que se p é um primo ímpar e g é uma raiz primitiva ímpar para p, também o é para $2p$.

   b) Demonstrar que se p e q são primos ímpares diferentes, não existe raiz primitiva para $m = p \times q$.

5. De quantas maneiras podemos ordenar as 26 letras do alfabeto de modo a que as 5 vogais fiquem separadas umas das outras?

6. a) Em quantas sequências de 30 lançamentos de um dado é que todas as faces saem o mesmo número de vezes?

   b) Quantas sequências de 30 lançamentos de um dado somam 105 pontos?

7. Numa turma com 50 estudantes realiza-se um teste com 4 perguntas. Cada resposta recebe a cotação de 2 valores (certo), 1 valor (parcialmente certo) ou 0 valores (errado). No fim da correcção, o professor verifica que tem 105 respostas certas, 76 parcialmente certas e 19 erradas.

a) Quantas listas diferentes

$$c_1, c_2, c_3, c_4$$

com a cotação média de cada pergunta poderão resultar?

b) E quantas listas diferentes

$$x_1, x_2, \cdots, x_{50}$$

com a classificação dos estudantes poderão resultar?

8. Considerem-se as seguintes permutações de [10]:

$$\pi = (1,2)(3,4)(5,6,7,8,9)(10), \qquad \sigma = (1,2,3,4)(5,6)(7,8)(9,10).$$

a) Mostrar que existe uma permutação τ tal que $\tau \circ \tau = \pi$, mas que o mesmo não acontece para σ.

b) Quantas permutações μ de [10] existem tais que

$$\mu \circ \mu = (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9)(10)?$$

9. Quantas permutações π de [30] satisfazem a condição

$$\pi^5(i) = i \ \forall i \in [30]?$$

10. Dada uma família $\mathcal{A}$ de k-subconjuntos de $[n]$, seja $\nabla(\mathcal{A})$ a família de $k+1$-subconjuntos de $[n]$ que contêm algum dos elementos de $\mathcal{A}$, ou seja

$$\nabla(\mathcal{A}) = \{B \subset [n] : |B| = k+1 \ \wedge \ A \subset B \text{ para algum } A \in \mathcal{A}\}.$$

Contando de duas maneiras os pares (A, B) com $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \nabla(\mathcal{A})$, mostrar que

$$|\nabla(\mathcal{A})| \geq \frac{n-k}{k+1}|\mathcal{A}|.$$

11. De quantas maneiras podemos colorir os vértices de um hexágono regular com 4 cores, se considerarmos idênticas as colorações que se podem obter uma da outra por rotação ou reflexão?

12. a) Mostrar que existem grafos simples com 7 vértices, 4 deles com grau 3 e os outros com grau 2.

b) Dar exemplos de três grafos nessas condições, um deles não conexo, outro conexo mas contendo uma aresta de corte, e outro conexo e sem arestas de corte.

13. Seja G o grafo em que os vértices são as arestas do grafo completo K_5 e em que dois vértices são adjacentes se (e só se) as respectivas arestas de K_5 incidem num mesmo vértice (este grafo designa-se habitualmente pelo grafo linha de K_5). Determinar o número de vértices, os seus graus e o número de coloração $\chi(G)$.

14. Definimos o grafo G do seguinte modo: os vértices são as sequências de comprimento 9 contendo 4 **A** e 5 **B**. Dois vértices são adjacentes se as sequências respectivas têm exactamente um **A** em posição coincidente. Determinar o número de vértices e de arestas de G e justificar se G é Euleriano.

15. Dado $k > 1$,seja T uma árvore com n vértices, em que cada vértice tem ou grau 1 ou grau k.

    a) Determinar o número de vértices de grau 1 de T, em função de k e n.

    b) Usar o código de Prüfer para determinar quantas árvores com vértices $v_1, \cdots, v_{20}$ satisfazem essa condição com $k = 4$.

    c) Se $k = 4$, para que valores de n é que podem existir árvores nas condições do enunciado?

16. Seja $G = G[X, Y]$ um grafo bipartido. Mostrar que

$$\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G}).$$

Sugestão: Sejam $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ tais que $\overline{G}$ tem um clique máximo com vértices $X_1 \cup Y_1$. Começar por justificar que para qualquer $v \in X \setminus X_1$ existe pelo menos um $u \in Y_1$ tal que v e u não são adjacentes em $\overline{G}$.