Elementos de Matemática Finita

Problemas para revisão

1. Determinar o menor inteiro positivo congruente com $2^{12500}+5^{32}$ módulo 10^6.

2. Determinar um inteiro $-58 \leq x \leq 58$ que satisfaça a congruência
$$x^{101} \equiv 5 \mod 117$$

3. Sabendo que m é o produto de k primos distintos, e supondo que $mdc(k, \phi(m)) = 1$, mostrar que a equação
$$x^k \equiv b \mod m$$
tem uma única solução, mesmo que $mdc(b, m) > 1$.

4. a) Mostrar que se $2^m + 1$ é primo então $m = 2^k$.
   b) Supondo que $p = 2^m+1$ é primo e que $(a|p) = -1$, mostrar que a é raiz primitiva módulo p.

5. Dado um inteiro $m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$, mostrar que existem exactamente
$$\prod_{i=1}^{n} mdc(p_i - 1, m - 1)$$
classes de congruência módulo m que satisfazem
$$a^{m-1} \equiv 1 \mod m.$$

6. a) Calcular o coeficiente de x^2y no polinómio $p(x, y) = (2 + x - y)^5$.
   b) Calcular os coeficientes de x^{17} e de x^{18} no polinómio $p(x) = (1 + x^2 + x^3)^{15}$.

7. Dados $m \leq n$, mostrar que $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}$.

8. De quantas maneiras não equivalentes podemos colorir as faces de um cubo com duas cores, com a condição de haver o mesmo número de faces de cada cor, se duas colorações são equivalentes caso uma possa ser obtida da outra por uma simetria do cubo? E se colorirmos os vértices ou as arestas do cubo?

9. a) Quantos subconjuntos de $[n]$ com k elementos não têm elementos consecutivos?

   b) Mostrar que o número X_n de subconjuntos de $[n]$ sem elementos consecutivos é igual ao número de Fibonacci F_{n+2}.

   Sugestão: Na alínea b), considerar os subconjuntos que contêm n e os que não contêm.

10. Dados k e n fixos, determinar o número de sequências $X_1, \cdots, X_k$ de subconjuntos de $[n]$ que satisfazem

$$X_1 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset.$$

   Sugestão: Considerar a matriz $k \times n$ cuja entrada (i, j) é 1 se $j \in X_i$ e 0 caso contrário.

11. Mostrar que para todo o $k \geq 4$, $k \neq 5$, existe um grafo planar bipartido, regular de grau 3, com $2k$ vértices.
   Justificar a exclusão do caso $k = 5$.

12. Mostar que se G é um grafo simples com n vértices e m arestas, existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ tal que o número de arestas que ligam vértices de V_1 a vértices de V_2 é maior ou igual a $m/2$.

13. Um grafo G diz-se **aleatoriamente Euleriano** para $x \in V_G$, se todo o passeio simples maximal com início em x é um circuito Euleriano, isto é, um passeio simples fechado que percorre todas as arestas.

   a) Mostrar que G aleatoriamente Euleriano para x se e só se tem um circuito Euleriano e x pertence a todos os ciclos de G.

   b) Mostrar que qualquer grafo aleatoriamente Euleriano se obtém acrescentando a uma floresta F um novo vértice x adjacente aos vértices de grau ímpar de F.