Introdução à Teoria dos Números
Ficha 0: Conjuntos, funções e relações

$$X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$$

$$X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$$

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$$

Quando se consideram subconjuntos de um dado conjunto fixo X, usam-se igualmente as notações A^c ou $\overline{A}$ (complementar de A) para designar $X \setminus A$.

A união e intersecção de conjuntos são operações comutativas e associativas, e distributivas uma sobre a outra:

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

$X \subset Y$ denota o facto de todo o elemento de X ser também elemento de Y:

$$X \subset Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

Se $Y \subset X$ mas $Y \neq X$, usa-se a notação $Y \subsetneq X$.

Leis de Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \text{ e } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

onde o complementar se refere a $A \cup B$ (ou qualquer conjunto que o contenha).

Exercício 0.1 *Mostrar que para quaisquer conjuntos A, B e C*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

e que

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \text{ e } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

onde, por exemplo, A^c designa o complementar de A na união $X = A \cup B \cup C$: $A^c = X \setminus A$.

Exercício 0.2 *Mostrar que, se $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ e $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ são famílias de conjuntos satisfazendo*

$$A_i \supset A_{i+1}, \qquad B_i \supset B_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$$

então

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right)$$

Sem aquela condição esta igualdade verifica-se ou não?

Definição 0.3 *uma função $f : X \to Y$ diz-se*

1. ***injectiva*** *se*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X$$

2. ***sobrejectiva*** *se*

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$$

.

3. ***bijectiva*** *se for injectiva e sobrejectiva.*

Definição 0.4 *Se $f : X \to Y$, $W \subset X$ e $Z \subset Y$ definem-se as*

- *imagem de W por f:*

$$f(W) = \{f(x) : x \in W\}$$

- *imagem inversa de Z por f:*

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X : f(x) \in Z\}$$

Exercício 0.5 *1. Mostrar que*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) = n^2 + n + 1$$

é uma função injectiva mas não sobrejectiva.

2. Mostar que $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $d(n)$ ser o número de divisores naturais de n, é uma função sobrejectiva mas não injectiva.

Exercício 0.6 *Dada uma função $f : X \to Y$ e $A, B \subset X$, determinar se*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Se $C, D \subset Y$ determinar se

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

Definição 0.7 *Uma **relação** (binária) entre X e Y é um subconjunto $R \subset X \times Y$. Quando $Y = X$ dizemos abreviadamente que temos uma relação em X.*

É usual escolher um símbolo (por exemplo $\bowtie$) para representar a relação e usa-se então a notação $x \bowtie y$ para significar que $x \in X$ e $y \in Y$ estão na relação, ou seja $(x, y) \in R$.

Definição 0.8 *Uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto X é*

- ***unívoca** se $\forall x \in X, \exists^1 \in Y : (x, y) \in R$ onde o símbolo $\exists^1$ significa "existe um e um só"*
- ***reflexiva** se $x \mathcal{R} x \, \forall x \in X$*

- ***simétrica*** *se* $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- ***anti-simétrica*** *se* $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
- ***transitiva*** *se* $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Definição 0.9
- *Uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica chama-se uma* ***relação de ordem (parcial)****;*
- *Uma relação reflexiva, transitiva e simétrica chama-se uma* ***relação de equivalência****;*

Exercício 0.10 *Dada uma função* $f : X \to X$*, definimos* $f^m : X \to X$*, para* $m \in \mathbb{N}$*, como a composição de* f *consigo mesma* m *vezes; mais precisamente:*

$$f^0(x) = x \ \forall x \in X; \forall m \in \mathbb{N} \, f^m(x) = f(f^{m-1}(x)) \ \forall x \in X.$$

Mostrar que a relação $\mathcal{O}$ *definida em* X *por*

$$x\mathcal{O}y \text{ se } \exists m, n \in \mathbb{N}_0 : f^m(x) = f^n(y)$$

é uma relação de equivalência.

Exercício 0.11 *No conjunto* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ *definimos a relação* $\prec$ *do seguinte modo:*

$$(m, n) \prec (s, t) \text{ se e só se } m < s \vee (m = s \wedge n \leq t).$$

Verificar que $\prec$ *é uma relação de ordem parcial.*