Introdução à Teoria dos Números
Ficha 1: $0, 1, 2, 3, \cdots$

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e as suas propriedades mais elementares (propriedades das operações de soma e produto, ordem) são familiares a todos.
Além dessas $\mathbb{N}$ é caracterizado pelo

(Princípio da Boa Ordenação): Se $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$, então X tem um *primeiro elemento*, isto é

$$\exists x_0 \in X : x < x_0 \implies x \notin X$$

Uma consequência do Princípio da Boa Ordenação é o seguinte

Teorema 0.1 (Princípio de Indução Finita) *Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfaz as condiçõe*

$$\begin{aligned} \textbf{(i)} &: k_0 \in X, \\ \textbf{(ii)} &: k \geq k_0, k \in X \implies k+1 \in X, \end{aligned}$$

então

$$\forall x \in \mathbb{N} \land x \geq k_0 \; x \in X.$$

Exercício 0.2 *É um excelente desafio tentar mostrar a equivalência destes dois princípios!*

Este teorema é frequentemente usado da seguinte forma:

0.3 *Princípio de Indução Finita: Se $P(n)$ é uma dada proposição referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :*

i: existe um natural k_0 para o qual $P(k_0)$ é verdadeira;

ii: se $k \geq k_0$ e $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

Exemplo 0.4 *Ilustramos a aplicação do Princípio de Indução Finita através de um exemplo simples: provar por indução que a igualdade*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

se verifica para todo o $n \geq 1$.
Começamos por verificar que a igualdade se verifica para $n = 1$, o que é imediato.
Em seguida mostramos que, se a igualdade se verificar para um certo natural n então também se verifica para $n+1$: de facto, se

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

então

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ou seja a igualdade é igualmente válida para $n+1$ como queríamos mostrar. O passo essencial na dedução feita está na segunda igualdade, onde usamos a hipótese de que a igualdade se verifica para n para substituir o somatório $\sum_{k=1}^{n} k$ por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Atenção: nunca nos podemos esquecer de provar que $P(k_0)$ é verdadeira!

O que se prova no passo

$$P\left(k\right) \text{é verdadeira} \implies P\left(k+1\right) \text{é verdadeira}$$

é a implicação

Exercício 0.5 *"Adivinhar", calculando os primeiros casos, uma fórmula fechada (ou seja, sem soma) para cada uma das seguintes somas e demonstrá-las :*

a) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$;

b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$;

Exercício 0.6 (Números de Fibonacci) *Considerar a sucessão de inteiros definida por recorrência por*

$$F_1=1; F_2=1;$$
$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n>2.$$

F_n é chamado o $n-$ésimo número de Fibonacci.

a) Provar que

$$F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$$

$$F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$$

b) "Adivinhar" e demonstrar identidades para as seguintes expressões:

$$F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=???; \qquad F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=???$$

Exercício 0.7 *O jogo das Torres de Hanoi consiste no seguinte: existem três casas e uma pilha de n discos, de tamanhos decrescentes da base para o topo, na primeira casa; pretende-se mover a pilha para a terceira casa, cumprindo*

as seguintes regras: só se pode mover um disco de cada vez; não se podem colocar discos maiores sobre discos menores.
Qual é o menor número de movimentos (dependente de n, claro) necessário para terminar o jogo?

Exercício 0.8 *Mostrar que, dados n quadrados, é possível recortá-los em polígonos de modo a formar com estes um novo quadrado.*
Sugestão: *O único caso difícil é $n = 2$.*

Uma outra forma equivalente e por vezes de aplicação mais directa do Princípio de Indução Finita é a seguinte:

0.9 ***Princípio de Indução Finita ("FORTE"):***

Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :

i : $P(k_0)$ é verdadeira;

ii : $k \geq k_0$ e $P(k_0), P(k_0+1), \ldots, P(k)$ verdadeiras, implica que $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

Exercício 0.10 *Outro desafio: mostrar que os dois princípios de indução são logicamente equivalentes.*

Exercício 0.11 *Usar o Princípio de Indução Forte para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $(n-2)\pi$.*